

**Université Joseph Fourier**

**N° attribué par la bibliothèque**

/ / / / / / / / / / / / /

**THESE**

Pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'UJF**

**Spécialité : « Génie Electrique »**

Préparée au **Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble**

UMR 5529

Dans le cadre de l'école doctorale « **Electronique, Electrotechnique, Automatique, Télécommunication, Signal** »

Présentée et soutenue publiquement

par

**Eric MORIN**

Le 25/01/2005

**Titre :**

**Modélisation d'un réseau électrique de tramway : du composant au système**

**Directeurs de thèse : James ROUDET**

**Nicolas RETIERE**

**JURY**

M. SEDDIK BACHA

, Président

M. JEAN PAUL HAUTIER

, Rapporteur

M. XAVIER ROBOAM

, Rapporteur

M. JAMES ROUDET

, Directeur de thèse

M. NICOLAS RETIERE

, Directeur de thèse

M. DANIEL CORNIC

, Invité



*La communication consiste à comprendre celui qui écoute.*

*Jean Abraham*



## *Remerciements*



## **Remerciements**

Cette thèse s'est déroulée au Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble (LEG), d'octobre 2001 à janvier 2005, en convention CIFRE avec la société ALSTOM TRANSPORT®.

Mes remerciements s'adressent tout d'abord à Jean-Paul Hautier et Xavier Roboam. Je leur exprime ma gratitude pour avoir accepté de faire partie du jury, et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux de recherche. Au-delà de la simple présidence du jury, je tiens à remercier Seddik Bacha pour sa bonne humeur et pour ses conseils toujours très avisés sur cette thématique scientifique.

Je remercie également mes deux directeurs de thèse, Nicolas Retière et James Roudet, sans qui ce travail n'aurait pu être réalisé.

Je remercie tout d'abord Nicolas Retière pour sa pertinence dans sa réflexion scientifique et sa rigueur dans la relecture du mémoire de thèse. Son encadrement a été remarquable.

Je remercie enfin James Roudet pour son expérience et sa personnalité qui font de lui une personne d'exception.

Au sein de la société ALSTOM TRANSPORT, je remercie tout d'abord Laurence Miguët pour son implication dans le projet de partenariat avec le LEG. Je remercie ensuite chaleureusement Daniel Cornic. Son dynamisme et sa bonne humeur, mariés à ses compétences techniques ont été les vecteurs de la qualité de son encadrement. *Le courant passe !*

J'adresse également ma plus profonde reconnaissance à Pierre-Marie Lepeu, pour l'homme qu'il est. Je le remercie pour son suivi, son écoute, son aide, et ses conseils éclairés.

Je remercie amicalement Marius Iordache, pour m'avoir encadré sur la thématique des harmoniques, sans oublier Alain Manet et Pierre Authié pour leur bonne humeur et leurs conseils dans le monde des simulations.

Après trois années passées au LEG, je ne peux que remercier toutes les personnes que j'ai côtoyées. L'énumération serait trop longue, et les oublis seraient regrettables, alors je globalise mes remerciements en saluant les hommes et les femmes qui font la vie du labo. Je remercie mes amis, les grenoblois pure souche ou ceux d'adoption, sans oublier les éternels tarins. Plus que des amis, je fais une mention spéciale à tous mes compagnons de cordée : merci pour les courses et les plombs. A vos agendas pour la suite !

Je tiens à remercier vivement mes parents et ma famille pour l'éducation et le soutien qu'ils m'apportent depuis toujours. Un petit coucou et un grand merci au fréro pour sa joie et sa bonne humeur. Et que les habitants de Doucy (France) ne se sentent point oubliés !

Les derniers mots de ces remerciements sont pour ma Delphine. Merci de tout cœur d'avoir été à mes côtés pour m'encourager et me soutenir. A notre avenir...



## **Table des matières**

<b>Remerciements.....</b>	<b>7</b>
<b>Table des matières .....</b>	<b>9</b>
<b>Liste des abréviations.....</b>	<b>13</b>
<b>Introduction .....</b>	<b>17</b>
<b>Chapitre 1 : Une vision système des réseaux d'alimentation électrique des tramways.....</b>	<b>21</b>
1.1. Présentation des équipements.....	22
1.1.1. Sous-stations de traction .....	22
1.1.2. Matériel roulant .....	24
1.1.3. Retour des courants de traction, courants vagabonds .....	26
1.2. Structures des réseaux d'alimentation .....	26
1.2.1. Lignes Aériennes de Contact (LAC) .....	26
1.2.2. Alimentations Par le Sol (APS) .....	27
1.2.3. Notions de signalisation.....	30
1.3. Stockage énergétique et production embarquée .....	31
1.3.1. Domaines d'applications.....	31
1.3.2. Techniques modernes pour le stockage énergétique.....	32
1.3.3. Alimentation embarquée via la pile à combustible.....	33
<b>Chapitre 2 : Des enjeux, des problématiques, une thèse.....</b>	<b>37</b>
2.1. Enjeux.....	37
2.2. Perturbations inhérentes aux réseaux d'alimentation électrique.....	39
2.2.1. Perturbations en régime permanent .....	39
2.2.2. Perturbations en régime transitoire.....	41
2.3. Méthodes d'estimations spectrales .....	42
2.3.1. Approches temporelles .....	42
2.3.2. Approches fréquentielles directes.....	43
2.3.3. Approches fréquentielles itératives .....	46
2.3.4. Choix d'une méthode d'estimation spectrale .....	47
2.4. Modélisation des systèmes de transmission .....	48
2.4.1. Méthode de Carson / Pollaczek.....	49
2.4.2. Méthode de la profondeur de pénétration complexe .....	51
2.4.3. Méthode PEEC .....	53
2.4.4. Méthode des éléments finis.....	53
2.4.5. Choix d'une méthode de modélisation des systèmes de transmission.....	54
<b>Chapitre 3 : Des modèles temporels et fréquentiels pour les structures passives.....</b>	<b>57</b>
3.1. Modélisation d'une ligne aérienne de contact .....	57
3.1.1. Présentation et détail de la structure .....	57
3.1.2. Approche par les éléments finis.....	58

3.2. Alimentation Statique par le Sol (ALISS) .....	68
3.2.1. Présentation et détail de la structure .....	68
3.2.2. Matrices caractéristiques .....	69
3.2.3. Comparaisons LAC / ALISS.....	70
3.3. Modélisation des transformateurs de sous-station.....	71
3.3.1. Matrices primitives .....	72
3.3.2. Transformateur $Dy_n$ .....	73
3.3.3. Transformateur $Ddy_n$ .....	76
3.3.4. Applications.....	79
3.4. Points clefs sur les structures passives modélisées .....	80
<b>Chapitre 4 : Vers une analyse dynamique des réseaux d'alimentation électrique .....</b>	<b>83</b>
4.1. Transition dynamique entre secteurs conducteurs.....	84
4.1.1. Analyse du scénario.....	84
4.1.2. Modélisation du contact électrique.....	86
4.1.3. Etude de la transition .....	90
4.2. Comportement dynamique du réseau de La Rochelle .....	93
4.2.1. Schéma électrique équivalent de la ligne .....	93
4.2.2. Simulations .....	98
4.3. Bilan des analyses dynamiques .....	105
<b>Chapitre 5 : Vers une analyse harmonique des réseaux d'alimentation électrique .....</b>	<b>109</b>
5.1. Prérequis de la méthode de calcul harmonique .....	109
5.2. Modélisation d'un pont redresseur monophasé .....	111
5.2.1. Eléments théoriques .....	111
5.2.2. Démarche générale de résolution.....	116
5.2.3. Définition de la taille du système, initialisation des inconnues.....	117
5.2.4. Résolution fréquentielle itérative.....	121
5.2.5. Validation .....	125
5.2.6. Cas des interharmoniques.....	126
5.3. Modélisation d'un pont redresseur triphasé .....	127
5.3.1. Eléments théoriques .....	127
5.3.2. Définition de la taille du système, initialisation des inconnues.....	132
5.3.3. Résolution fréquentielle itérative.....	134
5.3.4. Validation .....	136
5.3.5. Influence de l'empiètement sur les spectres.....	136
5.4. Réseaux simples d'étude .....	137
5.4.1. Association d'un transformateur $Dy_n$ au pont redresseur triphasé.....	138
5.4.2. Association en parallèle de ponts redresseurs monophasés.....	139
5.5. Bilan des analyses fréquentielles .....	141
5.5.1. Validité et performance .....	141
5.5.2. Perspectives .....	143
<b>Conclusion et perspectives.....</b>	<b>147</b>
<b>Annexe I. Calcul du flux par le potentiel vecteur magnétique... 151</b>	

Cas de conducteurs filiformes en magnétostatique .....	151
Considérations énergétiques.....	152
<b>Annexe II. Composantes matricielles des transformateurs.....</b>	<b>155</b>
Transformateur $Dy_n$ .....	155
Transformateur $Ddy_n$ .....	157
<b>Annexe III. Mesure des paramètres d'un transformateur.....</b>	<b>159</b>
Rappels théoriques : cas du transformateur à deux enroulements.....	159
Méthodologie pour un transformateur à neuf enroulements .....	161
Résultats des mesures effectuées .....	162
Principe de généralisation des résultats.....	164
<b>Annexe IV. Détermination d'une fréquence équivalente .....</b>	<b>167</b>
<b>Annexe V. Méthode de calcul numérique des harmoniques.....</b>	<b>169</b>
Transformation d'une grandeur par la modulation .....	169
Passage d'une notation complexe à une notation matricielle .....	170
<b>Annexe VI. Dérivées des termes de la jacobienne .....</b>	<b>173</b>
Pont redresseur monophasé .....	173
Pont redresseur triphasé .....	180
<b>Publications pendant la thèse.....</b>	<b>187</b>
<b>Bibliographie .....</b>	<b>191</b>



## Liste des abréviations

<b>AC</b>	Alternative Current
<b>ALISS</b>	Alimentation Statique par le Sol
<b>APS</b>	Alimentation Par le Sol
<b>BTA</b>	Basse Tension de niveau A, cf. Tableau 1-1
<b>BTB</b>	Basse Tension de niveau B, cf. Tableau 1-1
<b>CEM</b>	Compatibilité ElectroMagnétique
<b>DC</b>	Direct Current
<b>DFT</b>	Discrete Fourier Transform
<b>FFT</b>	Fast Fourier Transform
<b>HTA</b>	Haute Tension de niveau A, cf. Tableau 1-1
<b>HTB</b>	Haute Tension de niveau B, cf. Tableau 1-1
<b>IGBT</b>	Insulated Gate Bipolar Transistor
<b>MEF</b>	Méthode des Elements Finis
<b>MLI</b>	Modulation de Largeur d'Impulsion
<b>LAC</b>	Ligne Aérienne de Contact
<b>MTL</b>	Multiconductor Transmission Line
<b>PAC</b>	Pile A Combustible
<b>PEEC</b>	Partial Element Equivalent Circuit
<b>PCC</b>	Poste de Commandes Centralisées
<b>STREAM</b>	Système de Transport Electrique à Attraction Magnétique
<b>TBT</b>	Très Basse Tension, cf. Tableau 1-1

	<b>AC</b>	<b>DC</b>
<b>TBT</b>	0 – 50 V	0 – 120 V
<b>BTA</b>	50 V – 500 V	120 V – 750 V
<b>BTB</b>	500 V – 1 kV	750 V – 1,25 kV
<b>HTA</b>	1 kV – 50 kV	1,25 kV – 75 kV
<b>HTB</b>	> 50 kV	> 75 kV

Tableau 1-1 : Classifications des tensions alternatives et continues



# *Introduction*





## **Introduction**

L'accessibilité ! Voilà un mot clef dans le monde du transport collectif urbain. Sa sémantique couvre des notions techniques, géographiques, physiques et sociales. Les accessibilités technique et géographique ont pour but de dynamiser le développement économique et culturel d'une ville, en la dotant d'équipements de transport fiables, disponibles, robustes et adaptés à ses essors. L'accessibilité physique est synonyme d'égalité dans les possibilités de déplacements pour les personnes à mobilité réduite. Enfin, l'accessibilité sociale vise à désenclaver certains quartiers par rapport aux autres.

L'architecture d'un réseau de transport collectif urbain est influencée par de nombreux facteurs d'ordre politique, historique, économique, géographique ou technique. Dans tous les cas de figure, la recherche de la fiabilité et de la disponibilité d'un réseau de transport collectif nécessite de cerner et de maîtriser son fonctionnement à tout instant. L'utilisation de nouveaux concepts ou de technologies modernes au sein de ces réseaux doit être synonyme d'agrément et de vitalité, et non de contrainte et de lourdeur. Pour ce faire, un effort de recherche et de développement doit être nécessaire, et tout projet de transport doit être mature avant d'être implanté.

En France, dans les années 1980, après une période marquée par une prolifération du parc automobile mais aussi par un manque de cohérence politique en matière d'aménagement urbain, le tramway connut un nouvel essor. Il devint l'un des vecteurs des projets d'urbanisation de nombreuses agglomérations. Depuis, pour des villes de 300 000 à 500 000 habitants, il constitue une ligne majeure du réseau des transports urbains (Strasbourg, Nantes, Grenoble). Pour des villes plus importantes, il hiérarchise le réseau urbain entre bus et métros (Paris, Lyon, Bordeaux).

Les tramways sont pour la plupart électrifiés, et chacun d'entre eux est usuellement raccordé à un réseau électrique continu. Les rôles et caractéristiques de ces réseaux d'alimentation électrique sont multiples :

- ils procurent des connexions physiques entre les producteurs d'énergie électrique et les consommateurs ;
- ils sont dimensionnés et protégés afin de permettre aux systèmes de fonctionner en régime normal comme en régime dégradé ;
- leur structure intègre de nombreux convertisseurs statiques (redresseurs, onduleurs, hacheurs) et de nombreux composants passifs (transformateurs, lignes de transmission, filtres) ;
- le matériel roulant se compose de véhicules qui remplissent successivement les rôles de charges ou de générateurs mobiles sur le réseau.

Les trois premiers points sont communs avec les réseaux de production, de transport et de distribution de l'énergie électrique d'un pays, alors que le dernier se révèle spécifique aux réseaux de transports ferroviaire et urbain.

L'étude d'un réseau d'alimentation électrique de tramway nécessite une vision et une connaissance du système dans son intégralité. Les analyses de son comportement, lors des scénarii de fonctionnement, requièrent toutefois un regard précis et localisé sur les composants du système. La ligne directrice de la thèse sera dictée par ces motivations : nous nous efforcerons d'apporter une vision système à l'étude d'un réseau d'alimentation électrique de tramway, tout en ayant le souci d'apporter localement le niveau de modélisation nécessaire.

Une rapide visite des réseaux de tramway sera proposée dans le premier chapitre. Un panorama sera ainsi dressé via une vision système de leurs principaux composants électriques. Les enjeux et problématiques seront ensuite évoqués dans un deuxième chapitre, dégageant de fait les motivations et buts de cette thèse.

A l'issue de ces parties introductives, le troisième chapitre nous apportera une vision sur les organes passifs des réseaux d'alimentation électrique des tramways. Les méthodes de modélisation seront développées et les résultats seront analysés.

Les quatrième et cinquième chapitres seront respectivement dédiés aux analyses des comportements dynamiques et harmoniques des réseaux d'alimentation électrique des tramways. Pour ce faire, le réseau de la ligne expérimentale de La Rochelle sera présenté et son comportement dans le domaine temporel sera analysé grâce à un ensemble de simulations caractéristiques des régimes normaux et dégradés. Une méthode d'analyse harmonique des réseaux d'alimentation électrique de tramway sera proposée dans le dernier chapitre, et ses résultats seront validés.

Nous conclurons cette thèse en prenant du recul par rapport aux travaux effectués ; les principaux axes de recherches et leurs résultats associés seront mis en avant, puis les perspectives ouvertes par la thèse seront discutées.

# *Chapitre 1*

## *Table des matières du chapitre 1 :*

1.1. Présentation des équipements .....	22
1.1.1. Sous-stations de traction .....	22
1.1.2. Matériel roulant .....	24
1.1.3. Retour des courants de traction, courants vagabonds .....	26
1.2. Structures des réseaux d'alimentation .....	26
1.2.1. Lignes Aériennes de Contact (LAC) .....	26
1.2.2. Alimentations Par le Sol (APS) .....	27
1.2.3. Notions de signalisation .....	30
1.3. Stockage énergétique et production embarquée .....	31
1.3.1. Domaines d'applications .....	31
1.3.2. Techniques modernes pour le stockage énergétique .....	32
1.3.3. Alimentation embarquée via la pile à combustible .....	33

## **Chapitre 1 : Une vision système des réseaux d'alimentation électrique des tramways**

Les réseaux de transports en commun électriques intra-muros actuels sont principalement basés sur des alimentations à courant continu, alors que les réseaux de desserte des banlieues utilisent des structures à courant alternatif. La raison principale de ce choix d'alimentation est d'origine historique. Les machines à courant continu ont été les premières machines électriques et leur commande en vitesse est très simple [BERNOT-99]. Au début du 20<sup>ième</sup> siècle, pour faire varier la vitesse des motrices à courant continu, les conducteurs plaçaient cran par cran des résistances en série avec le bobinage induit de ces mêmes motrices. Les progrès techniques ont tout d'abord permis de mieux contrôler ces machines (contacteurs mécaniques puis électriques). Ensuite, avec l'apparition des machines à courant alternatif et des convertisseurs statiques, les possibilités offertes pour la traction électrique se sont élargies, mais la base continue de l'alimentation urbaine est restée inchangée. Une seconde raison d'importance inhérente au choix du type d'alimentation est liée au ratio entre le nombre de véhicules en service sur la ligne considérée et la distance couverte. En effet, le cadencement du matériel roulant peut être très soutenu : il peut atteindre 1 min 30 s en utilisation métro et 2 min 30 s en tramway. Le parc de véhicules étant important, il est préférable d'utiliser des équipements de traction simples et légers (sans transformateur), et des équipements fixes plus complexes. En suivant le même raisonnement, pour une exploitation peri-urbaine, la quantité de matériel roulant est réduite et les distances à parcourir sont accrues. L'investissement est alors porté sur une complexification des équipements de traction, alors que les équipements fixes sont simples.

Les niveaux de tension des transports électriques ferroviaires sont fixés grâce à la norme EN 50163. Dans ce chapitre, nous nous restreindrons volontairement aux installations de tramways alimentés en 750 V *DC*. En Europe (excepté l'Allemagne) et aux Etats-Unis, les réseaux de tramways sont majoritairement alimentés en 750 V *DC*. Moins de 3 % des réseaux mondiaux sont équipés en 1500 V *DC* (Kyoto, Monterrey et Bursa). Les autres réseaux sont généralement alimentés en 600 V *DC* (en Allemagne, Suisse, Russie et dans les pays de l'Est). Certaines applications de tram-train<sup>1</sup> peuvent également être citées (25 kV – 50 Hz / 750 V *DC* à Sarrebruck ou 15 kV – 16,66 Hz / 750 V *DC* à Karlsruhe) [CORNIC-03]. Notons donc que le tram-train permet de se déplacer dans un cadre géographique étendu, sans "rupture de charge" c'est-à-dire sans changement de moyen de transport, grâce à une captation d'énergie électrique mixte (courants continu dans les villes et alternatif en zone périurbaine) ; Mulhouse, Strasbourg et Paris sont des exemples d'application.

---

<sup>1</sup> Tram-train : tramway conçu pour circuler à la fois sur les voies d'un réseau de tramway urbain et sur les voies ferrées périurbaines.

Dans ce premier chapitre, nous présenterons tout d'abord une partie des équipements présents sur les lignes de tramways. Leurs principales caractéristiques seront étudiées et leur dimensionnement analysé. Ensuite, notre attention se focalisera sur les structures des réseaux d'alimentation. Cette section présentera différents moyens de distribution de l'énergie électrique pour les applications du transport électrique urbain. Notamment, nous analyserons les variantes aux Lignes Aériennes de Contact (*LAC*) rendues viables grâce aux avancées technologiques. Enfin, nous évoquerons brièvement les possibilités de stockage énergétique et d'alimentation embarquée.

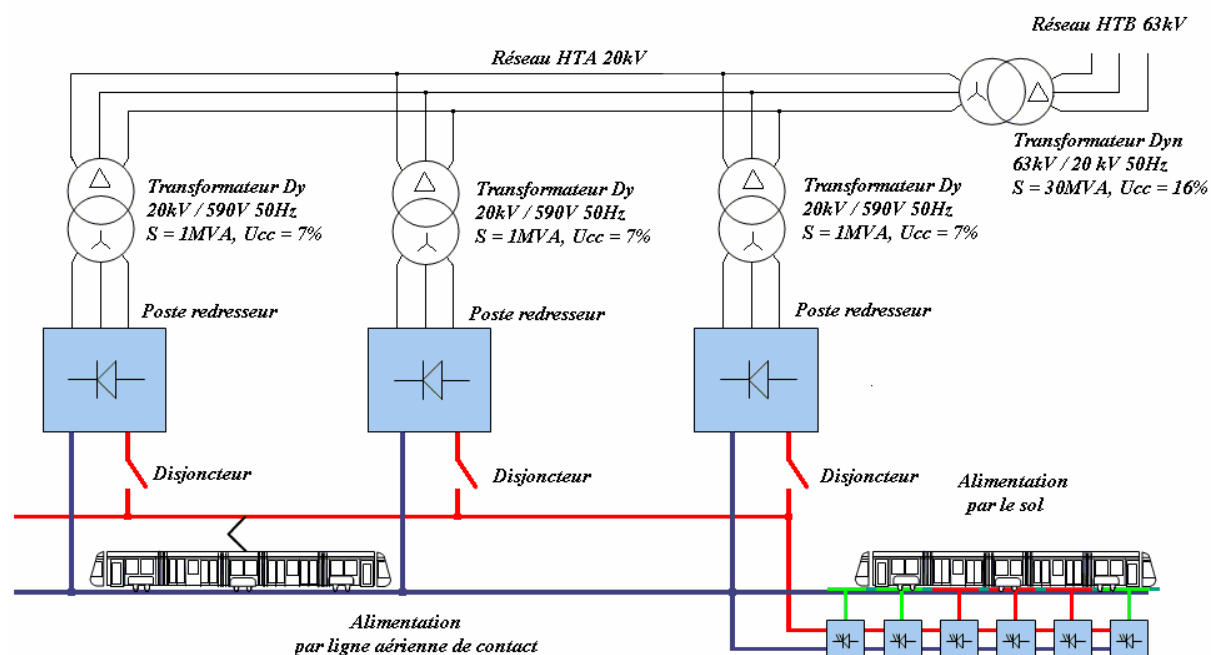


Figure 1-1: Illustration d'un réseau de tramway

La Figure 1-1 donne une vision globale d'un réseau d'alimentation électrique de tramway doté d'une *LAC* et d'une Alimentation Par le Sol (*APS*). A l'issu du chapitre, les divers composants de ce réseau auront été décrits.

## 1.1. Présentation des équipements

### 1.1.1. Sous-stations de traction

Une sous-station de traction est l'interface entre le réseau *HTA* local (10 kV à 20 kV), et le réseau continu, à 750 V *DC* par exemple. Le nombre d'arrivées *HTA* peut varier selon les réseaux de tramway. Au même titre que les réseaux d'alimentation électrique de métros, plusieurs connexions à des réseaux *HTA* distincts permettent d'assurer un service de fonctionnement minimum, lors d'un défaut majeur sur un des réseaux *HTA*.

Les sous-stations sont réparties le long des lignes en fonction des exigences de l'exploitant. Ces exigences sont dictées par les performances souhaitées pour la gestion de son exploitation (adéquation entre les grilles horaires et les puissances à installer), mais aussi par les contraintes d'implantation dans la ville. En effet, les emplacements susceptibles d'accueillir les sous-stations dans une ville sont assez restreints. La distance entre les sous-stations se révèle être un facteur à mettre en adéquation avec la structure utilisée pour le transport et la distribution du courant continu. Les tensions de lignes minimales acceptables en fonctionnement normal et dégradé (disjonction d'une sous-station par exemple) sont primordiales. En exploitation normale, par exemple, la tension minimale généralement acceptable sur une ligne de tramway est de 500 V *DC*. Les sous-stations peuvent toutefois être relativement éloignées les unes des autres (2 km par exemple) si des moyens de maintien de la tension sont installés. Pour ce faire, les solutions les plus couramment employées consistent à utiliser des Feeders<sup>2</sup> (généralement des conducteurs en aluminium de section importante) en parallèle des voies (ligne 1 du tramway de l'agglomération montpelliéraine), ou à doubler certaines *LAC* (ligne T2 à Paris - La Défense), afin de limiter les chutes de tension.

La puissance d'une sous-station monogroupe redresseur est généralement de 900 kW, débitant ainsi 1200 A sous 750 V. Un transformateur Dy 20 kV / 590 V se situe en amont du groupe redresseur [POWEREX-01]. Sa puissance apparente est de 1000 kVA. Un disjoncteur *DC* ultrarapide (durée d'ouverture inférieure à 20 ms) se positionne en sortie du groupe redresseur [ALSTOM-99]. Des éléments de comptage se greffent à chaque sous-station, en particulier si elle représente un point de comptage du réseau de tramway. Les sous-stations de traction peuvent également être dotées de deux groupes redresseurs connectés en parallèle ou en série, si les besoins en puissance du réseau ou les contraintes d'implantation le nécessitent. Dans ce cas, les deux groupes sont usuellement raccordés au réseau *AC* amont via un transformateur Ddy 20 kV / 2\*590 V. La gestion des sous-stations est assurée par un automate programmable qui transmet les données à un Poste de Commandes Centralisées (*PCC*). Ce dernier opère en temps réel aux manœuvres sur les diverses sous-stations.

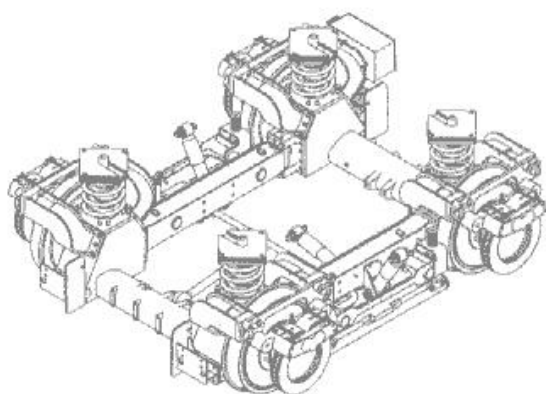
Pendant le freinage d'un tramway, ce dernier devient un générateur de courant continu. Le potentiel du pantographe augmente graduellement jusqu'à 900 V *DC*. Si une charge est connectée au réseau continu (tramway en phase de traction, équipements fixes), l'énergie cinétique du tramway en phase de freinage sera transformée en énergie électrique et sera utilisée par le tramway en traction. Si aucune charge n'est connectée au réseau lors du freinage d'un tramway, l'énergie électrique sera alors dissipée dans des résistances rhéostatiques (fixées en toiture du matériel roulant). L'insertion d'onduleurs de récupération sur la ligne continue (généralement dans les sous-stations) permet de transférer l'énergie excédentaire (c'est-à-dire celle qui n'est pas dissipée rhéostatiquement) du réseau continu vers le

<sup>2</sup> Nom anglais donné à un conducteur dont le rôle est de transporter de l'énergie.

réseau alternatif [TZENG-98]. Les réseaux de tramway de Strasbourg ou de Nantes sont par exemple équipés de tels dispositifs.

### 1.1.2. Matériel roulant

Le matériel roulant n'a pas cessé d'évoluer avec le temps. Afin de répondre aux attentes des usagers et des exploitants des réseaux de tramway, ALSTOM propose une gamme de tramway modulaire nommée CITADIS®. Grâce aux progrès et recherches effectués dans le domaine des matériaux et des chaînes de traction, les rames sont à plancher bas intégral et permettent un accès de plein pied aux voyageurs [CERTU-00].



Le boggie ARPEGE® est le cœur de la technologie 'plancher bas'. Il porte les roues, les freins à disque, les patins de freinage magnétique, ainsi que les différentiels et moteurs de traction (2 machines asynchrones de 120 kW par boggie moteur).

Figure 1-2 : Boggie ARPEGE®, ALSTOM

La chaîne de traction (issue de la gamme ONIX) composant chaque boggie moteur comporte un onduleur à IGBTs (Insulated Gate Bipolar Transistor) par boggie moteur [THURIN-90] [MULLER-00]. Les stratégies de commande des onduleurs sont de type MLI (Modulation de Largeur d'Impulsion) à des fréquences de quelques kHz [IORDACHE-02].

A titre d'exemple, une rame 302 de la gamme CITADIS® (modélisée par la suite) est équipée de deux boggies moteur. D'une puissance totale d'environ 900 kW, elle appelle ainsi un courant nominal de 1200 A sous une tension de 750 V DC. De nombreux filtres et convertisseurs statiques se situent également dans le tramway, afin d'assurer le fonctionnement des auxiliaires (climatisation, éclairage, ...) ou le freinage rhéostatique. La Figure 1-3 présente le schéma de puissance simplifié d'un tramway CITADIS 302.



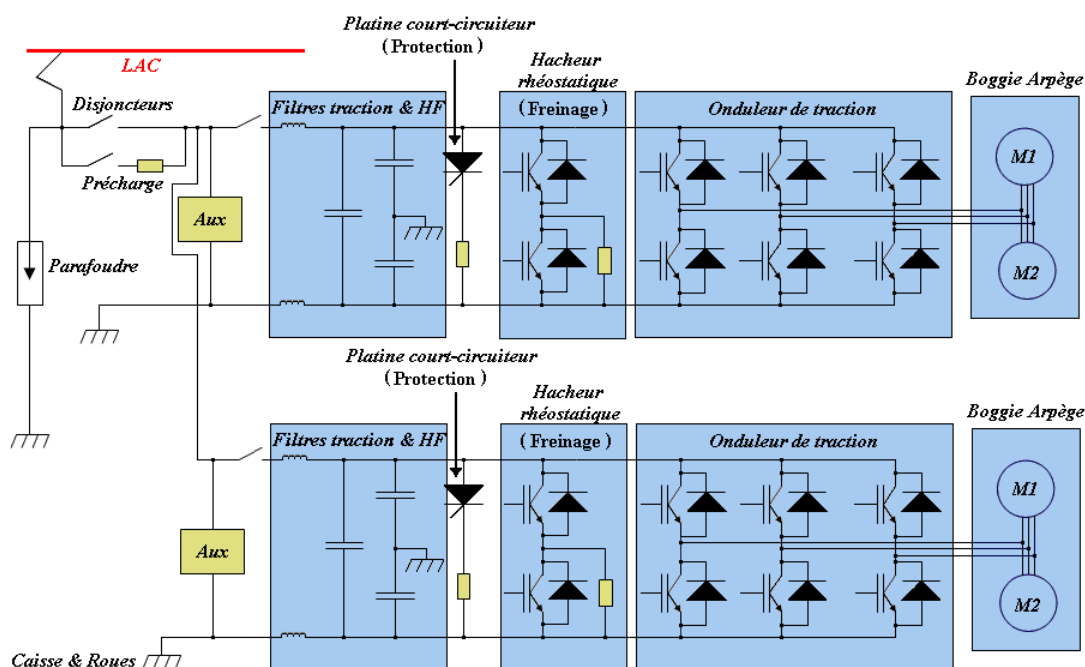


Figure 1-3 : Schéma électrique simplifié du tramway CITADIS 302

Durant la phase de démarrage du tramway, l'effort de traction exercé est maximal et constant jusqu'à 30 km/h environ, cf. Figure 1-4. Le tramway se dégage ainsi rapidement du trafic. Le courant débité pendant cette durée est proportionnel à la vitesse et augmente graduellement jusqu'à 1100 A (courant nominal), cf. Figure 1-5. Une phase de fonctionnement à puissance constante succède ensuite à celle de démarrage: le courant reste égal à 1100 A. A partir de 40 km/h, la puissance du tramway est réduite. La tension au pantographe restant égale, ou ne variant peu avec la position du tramway, le courant appelé par le tramway suit la même tendance que la puissance.

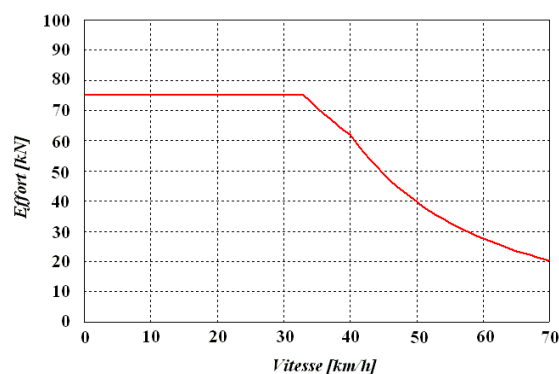


Figure 1-4 : Effort de traction d'un CITADIS 302 en fonction de sa vitesse

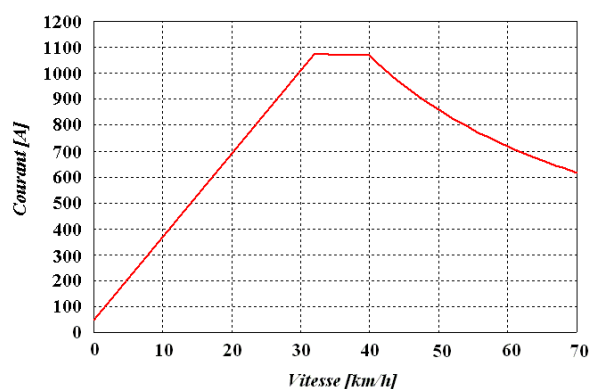


Figure 1-5 : Courant de traction d'un CITADIS 302 en fonction de sa vitesse

La vitesse commerciale d'une ligne de tramway se calcule en faisant le ratio entre la distance séparant les terminus et le temps de parcours moyen du matériel roulant : l'ordre de grandeur est généralement de 20 km/h (40 % supérieur aux bus). Pour des tramways évoluant majoritairement en site protégé, la vitesse commerciale peut atteindre 25 km/h.

### 1.1.3. Retour des courants de traction, courants vagabonds

Dans le cadre d'un roulement fer, les rails de roulement jouent un double rôle. Le premier sert de guidage mécanique lors de l'évolution du matériel roulant. Le second assure le retour de courant aux sous-stations de traction. Pour les tramways roulant sur pneus, le retour de courant peut se faire via un contact frotteur sur un troisième rail.

Le sol représente aussi involontairement un chemin de retour. Les rails de roulement ou l'éventuel troisième rail ne sont qu'imparfaitement isolés du sol, et permettent de ce fait une circulation partielle du courant de traction dans le sol (cf. Figure 1-6). Ces courants circulant à travers le sol sont appelés 'courants vagabonds'. Ils sont particulièrement néfastes au bon vieillissement des installations, car ils participent grandement à la corrosion des structures métalliques enterrées à proximité des voies et des sous-stations de traction. [BORDEAUX-96] [LECONTE-81] [MANISCALO-02].

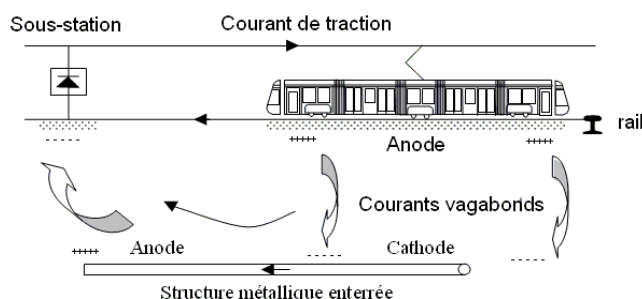


Figure 1-6 : Principe de circulation des courants vagabonds

Une meilleure isolation des rails du sol réduit les courants vagabonds, mais peut conduire à l'apparition de potentiels électriques de contact dangereux pour les personnes. Pour assurer la protection du public et du personnel, les potentiels électriques des rails de roulement ne doivent pas dépasser les limites imposées dans la norme EN 50122-1 (120 V).

La tension rail-sol sera ainsi surveillée et des contacteurs de mise à la terre automatisés seront placés au droit des sous-stations, à proximité des stations de passagers ou à tout autre endroit identifié par les simulations électriques (détection de potentiel rail-sol élevé en fonction du point kilométrique).

## 1.2. Structures des réseaux d'alimentation

### 1.2.1. Lignes Aériennes de Contact (LAC)

Les LAC sont le moyen le plus traditionnel pour transporter les courants –dans notre cas continus– entre les sous-stations et les rames d'un réseau de tramway. La ligne aérienne est divisée en sections, ce qui permet d'isoler une portion du réseau en cas de défaut, et d'assurer des services provisoires d'exploitation. Les LAC sont suspendues à des poteaux tous les 30 m ou 60 m (en fonction de la technique de pose [PERRIN-91]) ou accrochées aux façades des immeubles. Leur hauteur légale est de 6m (de manière à permettre le transit de convois routiers exceptionnels). Le matériau utilisé dans la fabrication des LAC est du cuivre électrolytique tréfilé, et les sections des conducteurs varient généralement de 107 mm<sup>2</sup> à 150 mm<sup>2</sup>.

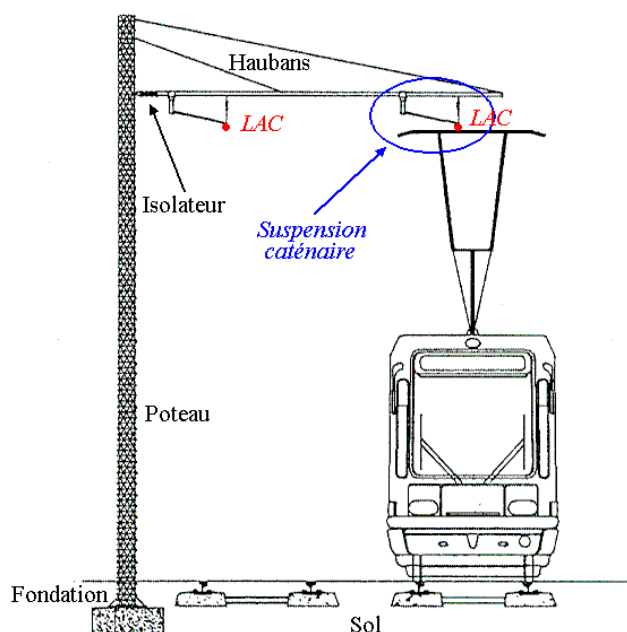


Figure 1-7 : Support latéral d'une ligne aérienne de contact

La Figure 1-7 représente un type de support pour la ligne aérienne de contact. La suspension caténaire vise à maintenir le fil de contact aussi parallèle à la voie que possible dans des conditions de fonctionnement dynamique. La pression entre la ligne de contact et le pantographe doit également être suffisante et constante, pour éviter les arcs électriques entre ces conducteurs.

Dans les années à venir, l'électrification aérienne des réseaux de transports urbains pourrait tendre à ralentir. Comme précédemment évoqué, pour des raisons esthétiques, techniques et pratiques, certains centres-villes souhaitent s'affranchir des lignes aériennes de contact. Les avancées techniques actuelles proposent entre autre une bimodalité d'énergie. La LAC pourrait par exemple être associée à un système d'Alimentation Par le Sol (APS) ou à des moyens de stockage énergétiques embarqués.

### 1.2.2. Alimentations Par le Sol (APS)

Initialement introduite à la fin du 19<sup>ème</sup> siècle, l'alimentation électrique des tramways par le sol avait été abandonnée pour des raisons de sécurité. Des câbles de puissance étaient placés au fond d'un caniveau, et un capteur situé sous chaque tramway y descendait afin d'établir le contact électrique. L'accessibilité de cette alimentation électrique aux usagers de la voirie l'a rendu trop dangereuse, et les lignes aériennes de contact sont apparues progressivement.

Les avancées technologiques actuelles permettent d'introduire à nouveau l'alimentation par le sol au travers de trois applications. On peut distinguer les moyens de captation d'énergie électrique par attraction magnétique et les moyens de captation par frotteur (comme avec le troisième rail des métros). Le système *STREAM* (Système de Transport Electrique à Attraction Magnétique) développé par ANSALDO® est basé sur le procédé de captation d'énergie électrique par attraction magnétique. Les systèmes d'INNORAIL® (filiale de SPIE-Enertrans®, rachetée en 2003 par ALSTOM) et d'ALSTOM sont basés sur une captation d'énergie par frotteur. Néanmoins, les secteurs conducteurs sont mis sous tension par l'intermédiaire d'interrupteurs (contacteurs ou *IGBTs*).

### 1.2.2.1. Système STREAM, ANSALDO

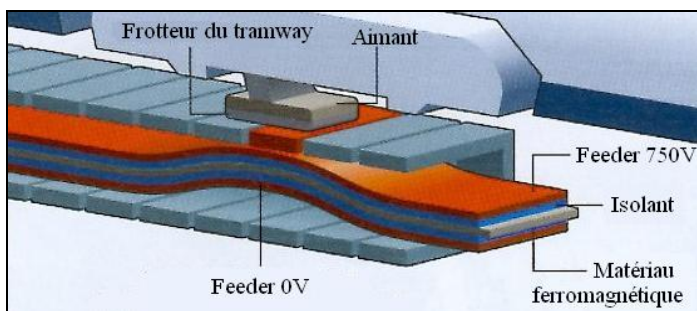


Figure 1-8 : Système d'alimentation par le sol  
STREAM, ANSALDO

Sous chaque véhicule, un aimant permanent est associé au frotteur positif. Lors du mouvement du véhicule, le matériau ferromagnétique est ainsi attiré vers le haut, mettant en contact le feeder positif et un ou deux secteurs conducteurs, Figure 1-8. Le frotteur du véhicule passe alors au potentiel 750 V.

L'alimentation des secteurs conducteurs est localisée sous le frotteur du véhicule. Les secteurs éloignés du secteur alimenté sont au potentiel 0 V, puisque la bande magnétique retombe par gravité d'une part et d'autre du frotteur, mettant le feeder négatif en contact avec les secteurs [KHATIR-00]. Le retour de courant peut être envisagé de deux manières différentes, comme dans toute alimentation par le sol. Si le véhicule est à roulement fer, le retour de courant peut s'envisager par les rails. Si le véhicule n'est pas guidé, un deuxième frotteur prendra alors place sous le véhicule. Ce dernier sera en contact avec une bande métallique, disposée parallèlement le long des secteurs conducteurs.

Une application de type Bus est en service à Trieste en Italie. Cependant, la pérennité du système n'est pas certifiée. Les problèmes majeurs sont liés à un manque de robustesse mécanique du système et au fait qu'un « gros » aimant est suffisant pour attirer la bande d'alimentation.

### 1.2.2.2. Système APS d'INNORAIL

Le principe de base du procédé d'APS d'INNORAIL est le même que celui développé par ALSTOM. Ces systèmes sont composés d'un ensemble de secteurs conducteurs, isolés électriquement les uns des autres. Ces secteurs se situent entre les rails de roulement, au milieu de la voie. Chez INNORAIL, les secteurs sont commutés au fur et à mesure de l'avancement du tramway par des contacteurs. La présence du véhicule est signalée grâce à une boucle d'induction.

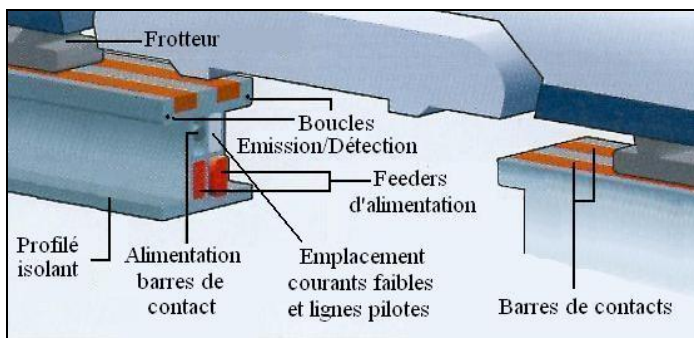


Figure 1-9 : Système APS d'INNORAIL

Pour chaque tramway, deux frotteurs sont placés d'une part et d'autre du véhicule. Le tramway de la communauté bordelaise, mis en service fin 2003, intègre sur un tronçon du centre ville, le système d'alimentation par le sol développé initialement par INNORAIL.

### 1.2.2.3. Système ALISS (ALimentation Statique par le Sol), ALSTOM

A la différence d'INNORAIL, la localisation des tramways est réalisée grâce à l'émission-réception d'un signal porteur, hautement sécurisé, issu de chaque véhicule. Ce signal transite via le frotteur du véhicule et est analysé par le module de commutation à l'aplomb du secteur en contact avec le frotteur. La mise sous tension est assurée grâce à la commutation d'interrupteurs de puissance *IGBTs*.

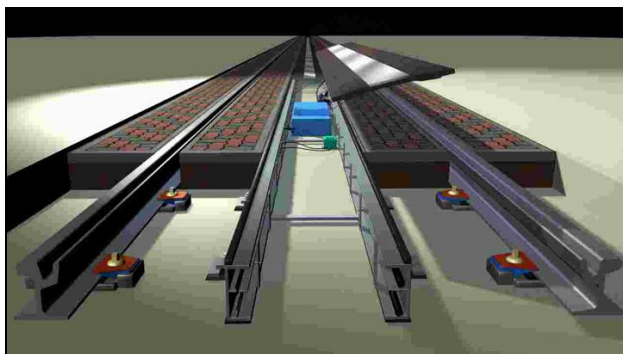


Figure 1-10 : Coupe transversale d'ALISS



Figure 1-11 : Module ALISS

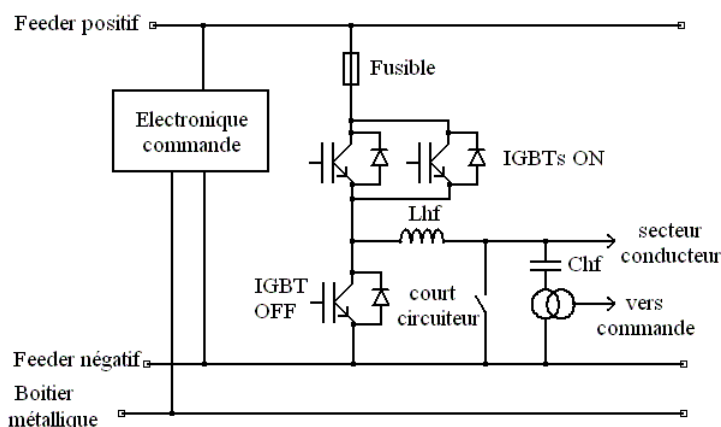


Figure 1-12 : Schéma de puissance d'un module ALISS

L'ensemble de l'électronique de puissance et de commande se situe dans le boîtier central de la Figure 1-10. La maquette d'un module *ALISS* et le schéma électrique correspondant sont présentés respectivement Figure 1-11 et Figure 1-12. Sans la présence de tramway, le potentiel du secteur conducteur est ramené à celui du feeder négatif, grâce à la commutation de l'*IGBT* OFF. A l'issue du décodage du signal de présence d'un tramway, les *IGBTs* commutent, et le secteur conducteur passe à 750 V. Pour une meilleure transition dynamique lors de l'avancement des tramways, trois secteurs seront mis sous tension après détection et analyse du signal. Si le frotteur d'un tramway est situé sur le secteur 'n' de la ligne et que l'émission du signal porteur est active, les secteurs 'n-1', 'n' et 'n+1' seront commutés (en régime sans défaut), cf. Figure 1-13. L'aspect dynamique du fonctionnement sera développé dans le paragraphe 4.1.1.



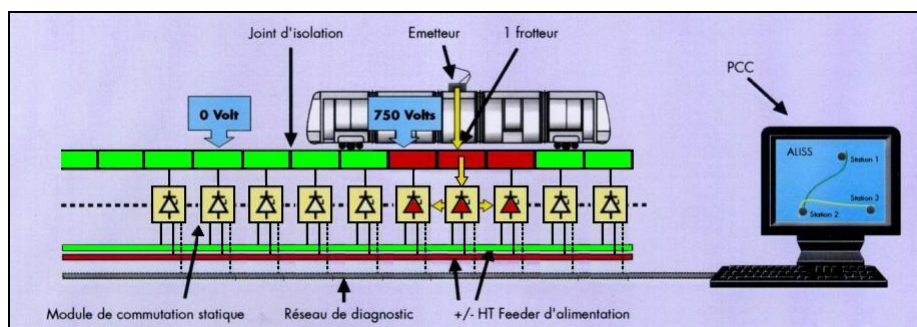


Figure 1-13 : Procédure d'alimentation des secteurs conducteurs, ALISS

### 1.2.3. Notions de signalisation

La signalisation regroupe l'ensemble des échanges d'information liés à la circulation du matériel roulant sur son réseau. Certaines données (trafic, maintenance, secours) sont transmises par radio ou par téléphone au PCC, alors que d'autres (détection des trains, de mécanismes d'aiguillage, de passages à niveau, de relais de sécurité) transitent par les rails de roulement. La sécurité intrinsèque et la disponibilité de circulation des tramways dépendent du bon fonctionnement des appareils de signalisation. Parmi l'ensemble des appareils de signalisation, les circuits de voie ont un rôle important. Ces dispositifs servent à indiquer l'état d'occupation d'un canton. Les Figure 1-14 et Figure 1-15 illustrent le fonctionnement d'un circuit de voie à joints isolants [IORDACHE-02].

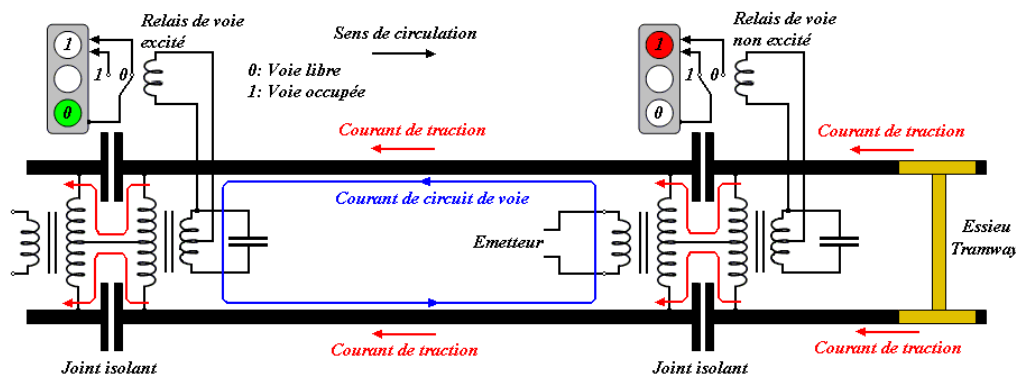


Figure 1-14 : Circuit de voie à joints isolants, canton libre

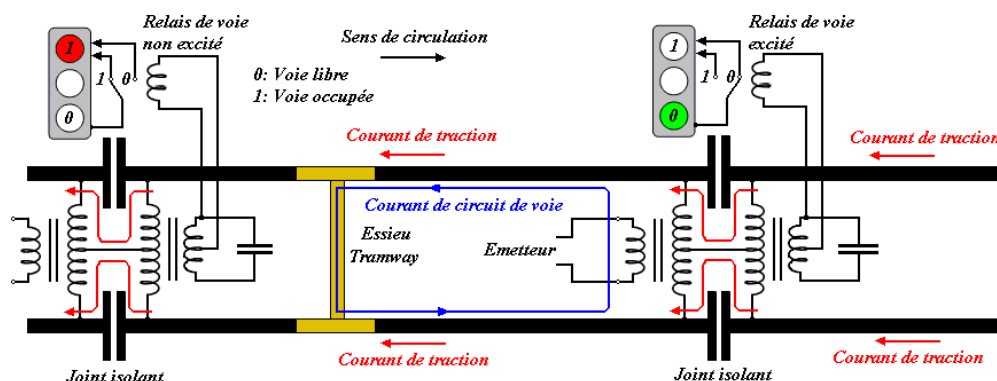


Figure 1-15 : Circuit de voie à joints isolants, canton occupé

Les rails de roulement sont utilisés à la fois pour transmettre les signaux électriques entre les émetteurs et les récepteurs des circuits de voie, ainsi que pour servir de retour aux courants de traction. Des liaisons inductives (transformateurs à point milieu) sont utilisées au niveau des joints isolants entre les cantons. Le courant de traction étant censé être équilibré entre les deux rails de roulement, le flux total engendré au niveau du transformateur est nul (somme de deux flux opposés). Lorsqu'un tramway se déplace sur une voie, ses essieux court-circuitent le récepteur du circuit de voie et la présence du tramway est décelée (commutation de relais).

Les circuits de voie généralement utilisés fonctionnent dans la gamme de fréquence 10 kHz – 20 kHz [HANNING-01] [SIEMENS-99]. En fonctionnement normal, lorsque le courant de traction est équilibré entre les deux rails, sa composition harmonique ne perturbe pas les circuits de voie, puisque le flux engendré dans le transformateur est nécessairement nul. Par contre, si le courant de traction n'est pas parfaitement équilibré, ou si un rail est cassé, le relais de voie peut être excité par des courants harmoniques de même fréquence que celle de l'émetteur. A l'heure actuelle, ce problème tend toutefois à disparaître puisque les signaux des circuits de voie modernes sont codés : ils ne peuvent plus être perturbés par des harmoniques.

En tout état de cause, une bonne compatibilité électromagnétique entre les divers composants d'un réseau de tramway reste une condition *sine qua non* pour prétendre approcher un bon fonctionnement du système. Pour se prémunir des perturbations électromagnétiques, les exploitants des réseaux de transports en commun imposent aux fournisseurs de matériel roulant des gabarits fréquentiels à respecter (propres à chaque pays). La diversité des circuits de voie et des gabarits imposés nécessite de connaître précisément les niveaux harmoniques d'un réseau de tramway. Ces spécificités seront à prendre en compte lors du développement d'un outil de calcul harmonique (chapitre 5).

### **1.3. Stockage énergétique et production embarquée**

#### **1.3.1. Domaines d'applications**

Les avancées technologiques des systèmes de stockage d'énergie permettent de considérer leurs utilisations dans des applications ferroviaires. Les domaines d'application concernés résident dans :

- les installations fixes ;
- les systèmes embarqués mixtes (dotés de plusieurs sources énergétiques dont l'utilisation n'est pas simultanée) ;
- les systèmes embarqués hybrides (dotés de plusieurs sources énergétiques dont l'utilisation est simultanée) ;
- les systèmes embarqués autonomes.

Les implantations fixes de volants d'inertie ou de super-capacités peuvent dorénavant constituer des alternatives aux méthodes traditionnelles de renforcement des systèmes d'alimentation en énergie ou en puissance. Ces systèmes de stockage peuvent être localisés dans les sous-stations ou implantés le long des lignes, en fonction des besoins de l'exploitant. Les effets de la connexion d'un élément de stockage sur le réseau agissent à plusieurs niveaux. Ainsi, l'insertion d'un élément de stockage :

- rehausse localement la tension de la ligne, améliorant de fait les transferts énergétiques. Les connexions d'un feeder de renforcement de tension sur la ligne peuvent ainsi être évitées. De la même manière, une augmentation de la distance entre les sous-stations peut être envisagée ;
- réduit les pointes de charge d'un réseau électrique. Les sous-stations de traction assurent ainsi la fourniture de la base de la puissance appelée sur le réseau, et les éléments de stockage pallient les pointes de charges transitoires ;
- améliore la disponibilité de récupération globale de l'énergie de freinage du matériel roulant.

### 1.3.2. Techniques modernes pour le stockage énergétique

Dans le domaine de la traction électrique, divers moyens de stockage énergétique sont utilisés. Chacun d'entre eux a son domaine de prédilection, privilégiant soit des applications où la puissance à délivrer est importante pendant un temps court, soit des applications où la puissance à délivrer est faible sur des durées plus conséquentes (cf. Figure 1-16).

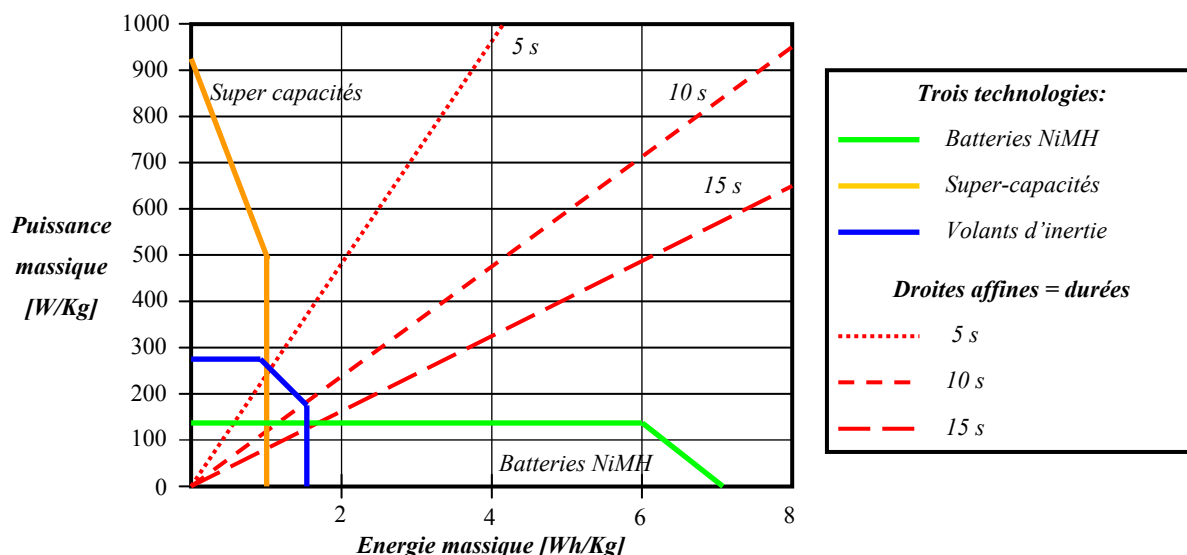


Figure 1-16 : Comparaison globale de systèmes de stockages complets

Les droites affines (5s, 10s et 15s) de la figure ci-dessus correspondent à des durées de fonctionnement. Plus le coefficient directeur est faible, plus la durée d'utilisation est élevée. Les batteries proposent des capacités de stockage élevées, mais leur lenteur dans le stockage ou dans la restitution d'énergie limite leur intérêt pour les applications ferroviaires.



Le principe des super-capacités repose sur des applications de condensateurs à double couche. Leur puissance massique est élevée, mais leur capacité de stockage est limitée. A la différence des batteries, les super-capacités permettent donc de délivrer une très forte puissance dans un laps de temps très court (quelques secondes). Leur utilisation est privilégiée dans des installations fixes ou embarquées afin de fournir une forte puissance momentanément. Les structures actuelles permettent d'atteindre une puissance de 1 MW pour une capacité énergétique de 2,3 kWh.

Les volants d'inertie constituent des moyens de stockage rotatifs. Deux variantes existent dans leur mise en oeuvre. La première consiste à la mise en rotation à faible vitesse (jusqu'à 4000 tr/min) d'une masse importante. La seconde consiste à la mise en rotation à vitesse élevée (de 12000 tr/min à 50000 tr/min) de masses plus faibles. Les encombrements sont ainsi réduits, mais la mécanique de ces systèmes est soumise à d'importantes sollicitations. Une maintenance régulière des composants mécaniques est nécessaire. Du point de vue de leur utilisation dynamique, les volants d'inertie se révèlent être un compromis entre les batteries et les super-capacités. Les volants d'inertie actuels disposent d'une puissance de 1 MW et d'une énergie pouvant atteindre 10 kWh.

### 1.3.3. Alimentation embarquée via la pile à combustible

Une pile à combustible (PAC) convertit une énergie chimique en énergies électrique et thermique. L'anode est le siège de l'oxydoréduction de l'hydrogène, alors que la cathode celui de la réduction de l'oxygène de l'air [CANDUSSO-02].

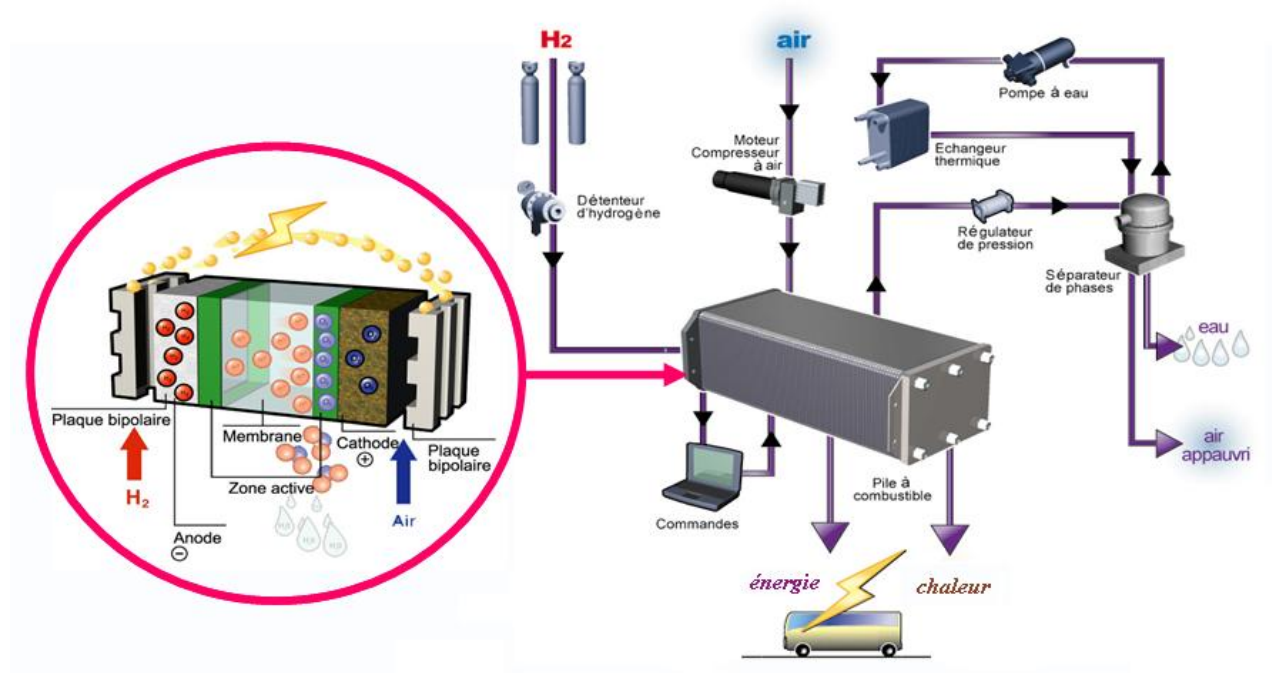


Figure 1-17 : Composants d'un système Pile à Combustible

Les avancées technologiques actuelles permettent d'envisager l'utilisation de la *PAC* comme moyen d'alimentation électrique embarquée. Dans le cas de l'utilisation exclusive de ce procédé dans un tramway, il serait envisageable de faire abstraction des *LAC*. La bimodalité *LAC / PAC* pourrait être prise en compte, mais l'application *PAC* tend à devenir un moyen autonome ou hybride. Dans le cadre du transport urbain, de nombreux travaux de modélisation et d'expérimentation sont en cours (Irisbus, Evobus, Man) afin d'améliorer la viabilité technique et économique de cette perspective énergétique.

## *Chapitre 2*

## *Table des matières du chapitre 2 :*

2.1. Enjeux.....	37
2.2. Perturbations inhérentes aux réseaux d'alimentation électrique.....	39
2.2.1. Perturbations en régime permanent .....	39
2.2.2. Perturbations en régime transitoire.....	41
2.3. Méthodes d'estimations spectrales .....	42
2.3.1. Approches temporelles .....	42
2.3.2. Approches fréquentielles directes.....	43
2.3.3. Approches fréquentielles itératives .....	46
2.3.4. Choix d'une méthode d'estimation spectrale .....	47
2.4. Modélisation des systèmes de transmission .....	48
2.4.1. Méthode de Carson / Pollaczek .....	49
2.4.2. Méthode de la profondeur de pénétration complexe .....	51
2.4.3. Méthode PEEC .....	53
2.4.4. Méthode des éléments finis .....	53
2.4.5. Choix d'une méthode de modélisation des systèmes de transmission.....	54

## **Chapitre 2 : Des enjeux, des problématiques, une thèse**

*Dimanche 9 avril 1995, de nombreux trains régionaux se sont arrêtés à Zurich en Suisse. Les locomotives furent stoppées par leurs équipements de protection, à cause d'importants courants harmoniques [MÖLLERSTEDT-00].* Cette brève médiatique n'est qu'un exemple parmi tant d'autres. Dans ce cas particulier, la société des chemins de fer Suisse SBB (Schweizerische BundesBahnen) venait de remplacer certaines vieilles locomotives par du matériel roulant de nouvelle génération, utilisant des convertisseurs statiques cadencés à haute fréquence. Analysées séparément, les nouvelles locomotives respectaient largement les normes en vigueur, mais connectées ensemble sur le réseau d'alimentation, les convertisseurs statiques de ces dernières ont commencé à interagir, causant des problèmes d'instabilité insoupçonnés jusque là.

Comme nous l'avions énoncé en introduction, la recherche de la fiabilité et de la disponibilité d'un réseau de transport collectif nécessite de cerner et de maîtriser son fonctionnement à tout instant. Cependant, les perturbations inhérentes aux réseaux d'alimentation électrique des tramways sont nombreuses, et elles n'apparaissent pas de manière exclusive lors de fonctionnements en régimes dégradés (perte d'une sous-station de traction par exemple). Ainsi, pour garantir fiabilité et disponibilité d'un réseau de transport électrique urbain, ce dernier doit être étudié pour tous les régimes de fonctionnements, dégradés ou non.

Dans ce chapitre, suite à la présentation des enjeux de la thèse, notre attention va se tourner vers une analyse des différentes sources de perturbations d'un réseau électrique de tramway. Une fois ces perturbations cernées, la thèse et ses axes de recherche associés seront replacés dans leur contexte scientifique via une rapide analyse de l'état de l'art.

### **2.1. Enjeux**

Les perturbations qui influencent la qualité des signaux ou le fonctionnement d'un réseau d'alimentation électrique de tramway, peuvent être générées en différents points du réseau (transformateur ou disjoncteur de sous-station de traction, matériel roulant, lignes AC ou DC). D'une manière générale, ces perturbations vont se propager le long du réseau électrique [HOLTZ-89]. Les Lignes Aériennes de Contact (LAC) ou les Alimentations Par le Sol (APS) sont ainsi les vecteurs des perturbations conduites. La Figure 2-1 illustre par exemple l'origine de quelques scénarii de défaut sur une ligne de tramway.

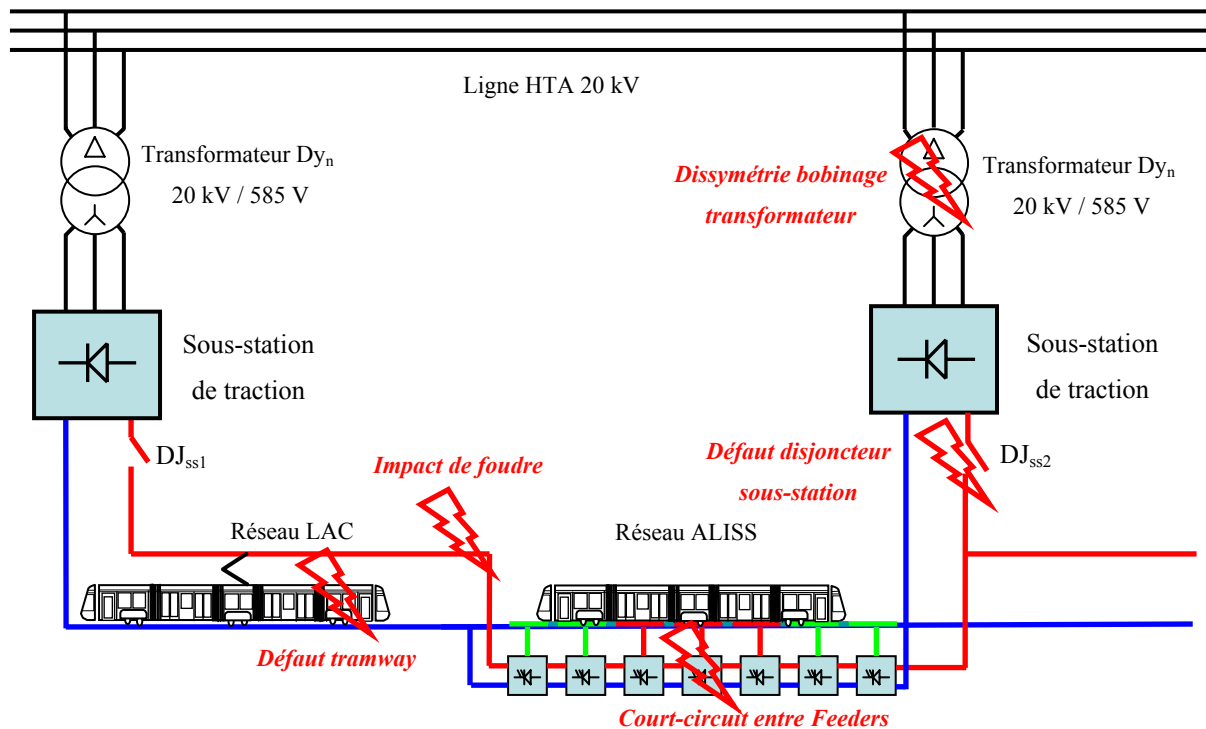


Figure 2-1 : Illustration de l'origine de quelques défauts sur un réseau de tramway simplifié

Dans le cas d'utilisation d'ALISS, il est important de rappeler la présence d'interrupteurs d'électronique de puissance (*IGBTs*), connectés régulièrement (tous les 5m) le long de la ligne, afin d'assurer la mise sous tension des divers conducteurs de surface lors de l'avancement du tramway. Pour des raisons évidentes de pertes à l'état passant, les *IGBTs* sont dimensionnés en tension au plus juste (3,3 kV). Nous comprenons ainsi qu'une tension non maîtrisée lors d'un régime transitoire peut s'avérer dangereuse pour l'installation.

L'étude de la fiabilité et de la disponibilité d'un réseau électrique de tramway demande de s'intéresser aux régimes de fonctionnement transitoires comme aux régimes établis. Les simulations de système sont intéressantes, car elles évitent de multiplier les essais expérimentaux et les prototypes, souvent coûteux en temps comme en argent. Pour analyser le comportement d'un système en régime transitoire, les simulations temporelles sont idéales. Elles sont très largement utilisées dans la communauté scientifique, et à l'heure actuelle, de très bons simulateurs permettent de traiter des problèmes de taille très importante (citons SABER® par exemple). Pour les méthodes d'analyse fréquentielle, que nous étudierons dans le paragraphe 2.3, de nombreux moyens existent, chacun ayant son domaine de prédilection. Rappelons ici toutefois une des facettes du sujet de thèse : les réseaux d'alimentation électrique de tramway sont composés de nombreux convertisseurs statiques (redresseurs de sous-station et onduleurs de tramway) pouvant interagir. La méthode d'estimation spectrale retenue devra être donc être capable de modéliser précisément les phénomènes d'interaction harmonique.

De manière à représenter le comportement temporel ou spectral d'un réseau d'alimentation électrique de tramway (en régime de fonctionnement normal ou dégradé), les structures des réseaux d'alimentation (*LAC* et *ALISS*) doivent également être modélisées précisément. Bien que ces structures d'alimentation soient propres au monde ferroviaire, ce travail de modélisation s'insère dans une problématique scientifique globale qui est celle des lignes de transmission que nous étudierons dans le paragraphe 2.4.

## **2.2. Perturbations inhérentes aux réseaux d'alimentation électrique**

Les perturbations d'un réseau d'alimentation se définissent comme l'ensemble des facteurs entâchant la qualité des grandeurs électriques. Les problèmes affectant la qualité des signaux peuvent se classer dans deux grandes familles : la famille des perturbations du régime permanent et celle des perturbations du régime transitoire.

### **2.2.1. Perturbations en régime permanent**

Les perturbations en régime permanent s'expriment souvent via des considérations harmoniques ou interharmoniques. A la différence des harmoniques, les interharmoniques sont des composantes spectrales qui ne sont pas multiples entiers du fondamental du système.

Soit un signal  $u(t)$  de période  $T$ , son développement en série de Fourier s'écrit :

$$u(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cdot \cos(i \cdot \omega \cdot t) + b_i \cdot \sin(i \cdot \omega \cdot t)) \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad \text{Équation 2-1}$$

où  $\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T}$  et  $a_i$  et  $b_i$  sont les coefficients de Fourier :

$$a_i = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(i \cdot \omega \cdot t) \cdot dt \quad \text{Équation 2-2}$$

$$b_i = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \sin(i \cdot \omega \cdot t) \cdot dt \quad \text{Équation 2-3}$$

Chaque terme de l'Équation 2-1 définit une fréquence harmonique du signal  $u(t)$ . Les interharmoniques s'expriment selon la même équation, mais  $\forall i \in (\mathbb{Q}-\mathbb{N})$ .

Les schémas électriques équivalents présentés Figure 2-2 et Figure 2-3 vont nous permettre d'illustrer les principaux phénomènes mis en jeu : présence d'interharmoniques et interaction entre convertisseurs statiques. Sur la première figure, deux redresseurs sont associés en parallèle, alors que sur la seconde, ils sont totalement découplés.

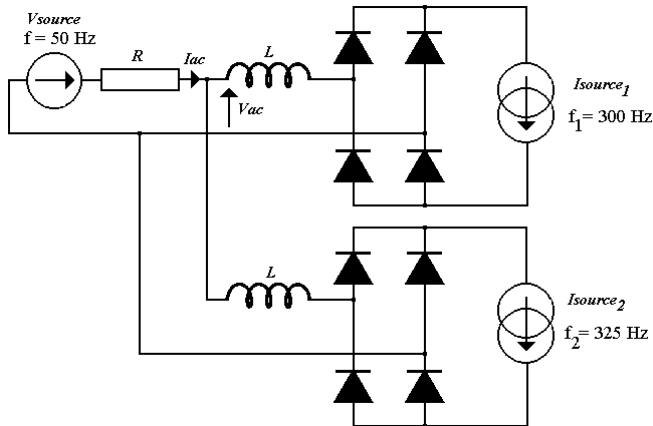


Figure 2-2 : Association parallèle de deux redresseurs

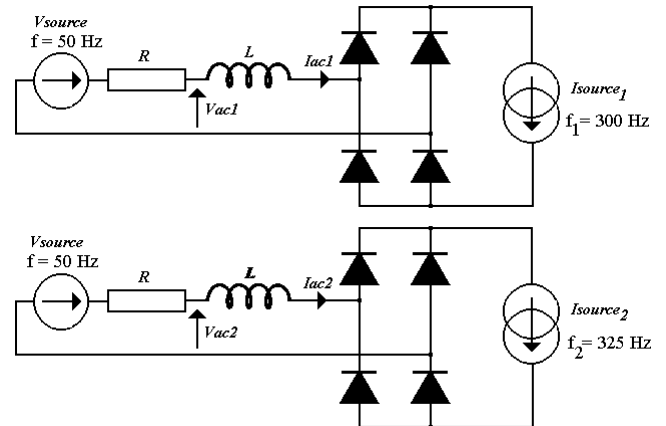


Figure 2-3 : Deux redresseurs indépendants

Les éléments des circuits sont définis tels que :

$$\begin{cases} I_{source_1}(t) = I_0 + I_1 \cdot \sin(2\pi \cdot f_1 \cdot t) \\ I_{source_2}(t) = I_0 + I_2 \cdot \sin(2\pi \cdot f_2 \cdot t) \end{cases}$$

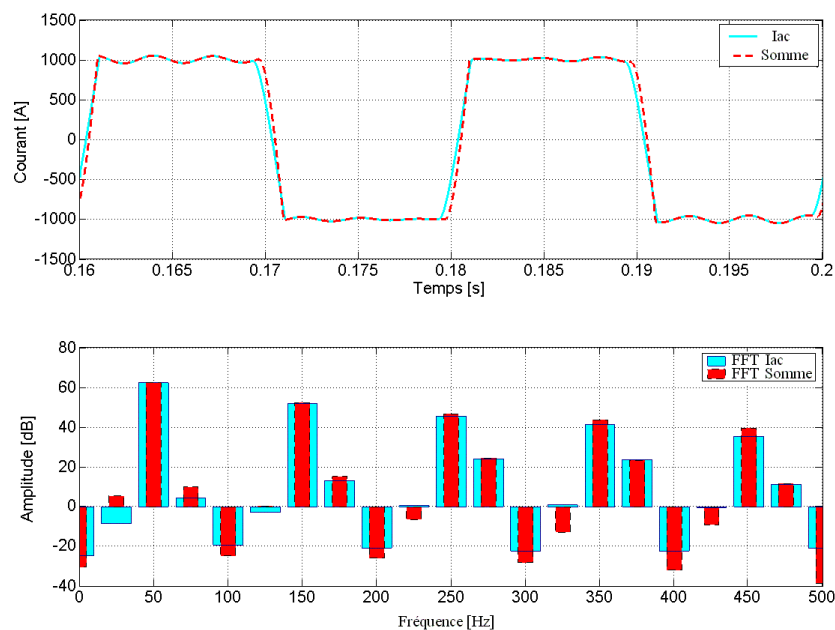
avec  $I_0 = 500 \text{ A}$ ,  $I_1 = I_2 = 25 \text{ A}$   
 $f_1 = 300 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 325 \text{ Hz}$ .

$$V_{source}(t) = V \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t)$$

avec  $V = 477 \text{ V}$ ,  $f = 50 \text{ Hz}$

$R = 0,1 \Omega$ ,  $L = 80 \mu\text{H}$

La Figure 2-4 illustre les courants débités par les ponts redresseurs. Le courant  $I_{ac}$  est tracé en trait plein. En traits pointillés, est donnée la somme des courants  $I_{ac1}$  et  $I_{ac2}$ . Si l'on s'attache dans un premier temps aux interharmoniques, la figure inférieure montre bien la présence de raies tous les 25 Hz. Les multiples non-entiers de 50 Hz composent la gamme des interharmoniques.


 Figure 2-4 : Comparaison entre  $I_{ac}$  et la somme  $I_{ac1} + I_{ac2}$



En comparant dans un second temps  $I_{ac}$  à la somme entre  $I_{ac1}$  et  $I_{ac2}$ , nous constatons que les deux courants sont différents. L'hypothèse du découplage des deux ponts redresseurs pour l'étude de la Figure 2-2 n'est pas valable. En effet, lorsque les redresseurs sont associés en parallèle, le comportement d'un redresseur va influencer le second à cause de la résistance de ligne  $R$  commune. D'un point de vue physique, les courants alternatifs des ponts redresseurs sont différents puisque les sources de courant connectées sur le réseau  $DC$  sont de fréquence distincte. La chute de tension aux bornes de la résistance de ligne  $R$  commune est donc due à la contribution de la circulation des deux courants harmoniques dans le composant. Ainsi, entre les Figure 2-2 et Figure 2-3, la référence de tension d'entrée des ponts est différente :  $V_{ac} \neq V_{ac1} \neq V_{ac2}$ .

Plus la résistance de ligne  $R$  diminue, plus la différence entre  $I_{ac}$  et la somme  $I_{ac1} + I_{ac2}$  est faible. En effet, la chute de tension dans  $R$  fixe les tensions alternatives en entrée des ponts redresseurs : si cette chute de tension est quasi nulle, le fonctionnement d'un pont ne va quasiment pas influencer le second. Le cas extrême correspond à la suppression complète de la résistance de ligne  $R$ . Dans ce cas précis, on a  $I_{ac} = I_{ac1} + I_{ac2}$ . De plus amples informations seront apportées dans le chapitre 5, lorsque nous aborderons l'aspect modélisation harmonique de la thèse.

L'analyse du comportement d'un système en régime permanent nécessite de considérer la présence des harmoniques, des interharmoniques, et des couplages entre les convertisseurs statiques. Le choix d'une méthode d'estimation spectrale en régime permanent devra donc remplir ces premiers objectifs.

### 2.2.2. Perturbations en régime transitoire

Lors de perturbations en régime transitoire, telles qu'une ouverture ou une fermeture brusque d'un disjoncteur de sous-station, l'établissement d'un court-circuit en un point du réseau ou l'apparition d'un choc de foudre sur une  $LAC$ , le réseau d'alimentation électrique de tramway peut être fortement perturbé. Dans le cas d'une structure d'alimentation de type  $ALISS$ , les marges de sécurité sont beaucoup plus restreintes qu'avec une  $LAC$ . En effet, comme nous l'avons déjà mentionné, le système d'alimentation statique par le sol développé par ALSTOM Transport requiert une parfaite maîtrise des niveaux de surtensions engendrées par les fonctionnements du système en régime normal et en régimes dégradés. Les  $IGBTs$  insérés le long de la ligne étant dimensionnés en tension au plus juste, une surtension non maîtrisée lors d'un régime transitoire peut être dangereuse pour l'installation.

L'analyse du comportement dynamique d'un système nécessite donc d'apporter un niveau de modélisation suffisant pour ses différents organes. Pour ce faire, il faut prendre du recul par rapport aux méthodes de modélisation couramment employées dans le monde industriel – résultats souvent de démarches très pragmatiques – et s'attacher à développer une procédure de caractérisation des structures d'alimentation en considérant leur spécificité.

### 2.3. Méthodes d'estimations spectrales

Depuis une cinquantaine d'années, le leitmotiv du domaine des simulations est d'apporter des outils rapides et spécialisés à un corps de métier. A l'heure actuelle, les méthodes d'estimations spectrales peuvent se diviser en trois catégories : les approches indirectes liées aux simulations temporelles, les approches fréquentielles directes et les approches fréquentielles itératives.

#### 2.3.1. Approches temporelles

Les simulations temporelles sont les méthodes les plus couramment utilisées dans la modélisation de circuits de puissance. Leur domaine d'étude privilégié est l'analyse des comportements dynamiques d'un système, puisqu'il est directement possible de visualiser les formes d'ondes des signaux (cf. chapitre 4). Les simulations temporelles peuvent bien évidemment être utilisées de manière à obtenir le contenu fréquentiel des variables du système : le calcul des spectres se fera alors de manière indirecte, via une post-exploitation des résultats temporels.

Les outils de simulation temporelle sont basés sur la création et la résolution numérique de systèmes d'équations différentielles relatifs au problème étudié. L'écriture des équations différentielles se fait usuellement via une interprétation du circuit électrique. La résolution peut être envisagée avec plusieurs méthodes [DOMMEL-69] [ARRILLAGA-03]. Pour effectuer une analyse spectrale des signaux, la *FFT* (Fast Fourier Transform) est employée à la suite d'une simulation temporelle. La précision et la validité des signaux temporels obtenus dépendent de plusieurs facteurs :

- le pas de temps de calcul ;
- le choix de la fenêtre de la *FFT* ;
- la dépendance des modèles vis-à-vis de la fréquence.

##### 2.3.1.1. Pas de temps de calcul

Les outils de simulation temporelle sont assez précis si le pas de temps de calcul est choisi en regard des constantes de temps du système. Dans le cas de simulations de structures mariant des convertisseurs statiques, le pas de temps à retenir est souvent très petit (de l'ordre de la  $\mu\text{s}$ ) pour tenir compte des commutations des interrupteurs de puissance.

- la simulation d'un circuit électrique à pas de temps fixe induit des temps de calcul assez longs. Par ailleurs, les études fréquentielles de système nécessitant de se placer dans un état de régime permanent, la simulation des régimes transitoires est souvent requise, occasionnant de ce fait des temps de simulation additionnels. Cette stratégie de simulation offre néanmoins un avantage : l'échantillonnage des signaux est réalisé à pas de temps constant. Une des deux conditions d'application de la *FFT* est alors remplie (la seconde sera étudiée en 2.3.1.2) ;

- l'utilisation d'un pas de temps variable pour les simulations temporelles peut être une solution judicieuse pour obtenir les formes d'onde des signaux. Cette stratégie de simulation requiert un re-échantillonnage des signaux avant d'appliquer la *FFT* ;
- une troisième technique est un compromis des deux précédentes. Celle-ci consiste à réaliser deux simulations temporelles successives. La première vise à simuler le circuit électrique avec un pas de temps grossier (fixe ou variable) afin de s'approcher au maximum du régime permanent. Les résultats de la première simulation définissent les conditions initiales de la seconde. Le pas de temps de la seconde simulation peut ainsi être fixe et adapté aux constantes de temps du système.

### 2.3.1.2. Choix de la fenêtre de la *FFT*

Deux conditions doivent être remplies pour appliquer convenablement une *FFT* sur un signal. La première, a déjà été évoquée : elle consiste à travailler sur un signal échantillonné à pas de temps constant. La seconde condition d'application de la *FFT* réside dans le choix de la fenêtre temporelle. Il faut en effet veiller à ce que la *FFT* soit appliquée sur un nombre entier de périodes. Pour des systèmes complexes, *a priori*, il n'est cependant pas toujours aisé de déterminer la période. Si une erreur est commise sur le choix de la fenêtre d'application de la *FFT*, le spectre est faussé. Il existe néanmoins certaines solutions pour limiter ces problèmes : application de fonctions d'apodisation, d'autocorrélation, ou utilisation de *DFT* (Discrete Fourier Transform) [FURSE-95].

### 2.3.1.3. Dépendance des modèles vis-à-vis de la fréquence

Les lignes de transmission sont des composants des réseaux d'alimentation électrique de tramway ayant des réponses spectrales caractéristiques (cf. chapitre 3). Afin de les modéliser précisément dans le domaine temporel, il faut avoir recours à des méthodes parfois difficiles à mettre en place (réseaux en échelle par exemple [PANG-88] [FERRI-00]). Aujourd'hui, il semble néanmoins possible de programmer directement les équations différentielles sans passer par une représentation de type circuit. Cette technique n'a pas été testée dans le cadre de la thèse ; elle mériterait toutefois de s'y intéresser. Suite à une bonne modélisation des composants du système sur l'intégralité de la gamme spectrale, l'ensemble des régimes de fonctionnement peut être étudié précisément (régimes transitoire et permanent).

### 2.3.2. Approches fréquentielles directes

Les approches fréquentielles directes visent à approximer le comportement harmonique des systèmes non-linéaires (convertisseurs statiques), de manière à pouvoir identifier leur effet sur les réseaux ou les

circuits électriques. Les calculs se font directement dans le domaine fréquentiel. L'utilisation de ces méthodes en *CEM* (Compatibilité ElectroMagnétique) est particulièrement intéressante puisque l'obtention des spectres est rapide. Ces méthodes sont par ailleurs utilisées lorsque des filtres ou des structures nécessitent d'être dimensionnés : les spectres des grandeurs électriques étant obtenus rapidement, les processus d'optimisation sont envisageables.

Nous classerons les approches fréquentielles directes en deux familles. La première consiste à remplacer les éléments non-linéaires du circuit électrique par des générateurs de courant équivalents ; les résolutions du circuit sont de ce fait simplifiées. La seconde vise quant à elle à dégager des équations du circuit (grâce au formalisme d'état par exemple) pour ensuite les résoudre.

### 2.3.2.1. Définition de générateurs équivalents

Cette approche vise à remplacer les éléments non-linéaires du circuit électrique par des générateurs de courant équivalents, indépendants les uns des autres [SCHEICH-93]. Ces générateurs de courant injectent des niveaux de courants harmoniques constants. Le réseau auquel ils sont connectés n'influe pas sur leurs valeurs. La pertinence de cette approche dépend bien évidemment du type de circuit électrique modélisé. Pour des structures simples n'intégrant qu'un seul convertisseur statique (à commutation forcée ou à commutation naturelle), cette approche donne de bons résultats sur un très large spectre. A titre d'exemple, la mise en parallèle de deux ponts redresseurs monophasés – présentés Figure 2-5 – peut être modélisée par le schéma équivalent Figure 2-6 :

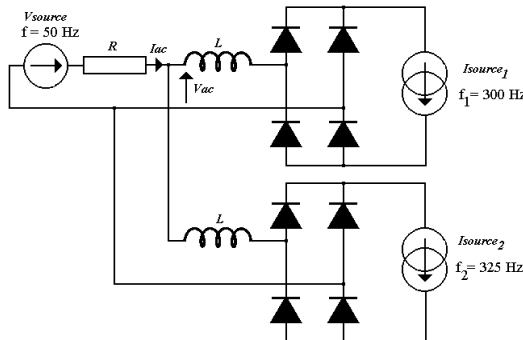


Figure 2-5 : Association parallèle de deux redresseurs

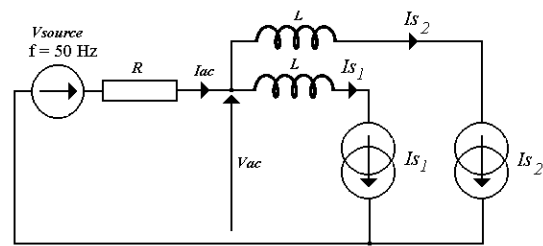


Figure 2-6 : Schéma équivalent, définition de générateurs équivalents

La Figure 2-6 donne une représentation générique de la simplification du circuit grâce aux générateurs équivalents.  $Is_1$  et  $Is_2$  sont les sources de courant équivalentes aux deux ponts redresseurs. Chacune de ces sources de courant est indépendante l'une de l'autre, et débite un niveau d'harmonique constant. Plusieurs méthodes existent pour déterminer le contenu harmonique des sources de courant. Une d'entre elle consiste par exemple à effectuer les calculs dans des plans de Fourier ou de Laplace [GROUD-97] [ARRILLAGA-98]. Le passage au domaine fréquentiel est ainsi direct puisque les opérateurs de Fourier et de Laplace sont reliés à la fréquence ( $p = 2\pi j \cdot \nu$ , avec  $p = j \cdot \omega$ ) :

**Transformée de Fourier :**  $f(t) \rightarrow F(v)$

$$F(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t).e^{-2\pi.j.v.t} dt \quad \forall v \in \mathbb{N} \quad \text{Équation 2-4}$$

**Transformée de Laplace :**  $f(t) \rightarrow L_f(p)$

$$L_f(p) = \int_0^{+\infty} f(t).e^{-p.t} dt \quad \forall p \in \mathbb{C} \quad \text{Équation 2-5}$$

La définition des générateurs équivalents est simplifiée grâce à l'utilisation de ces transformées. Une cellule de commutation – Figure 2-7 – peut par exemple être représentée à l'aide de constructions élémentaires grâce à la transformée de Laplace, cf. Figure 2-8.

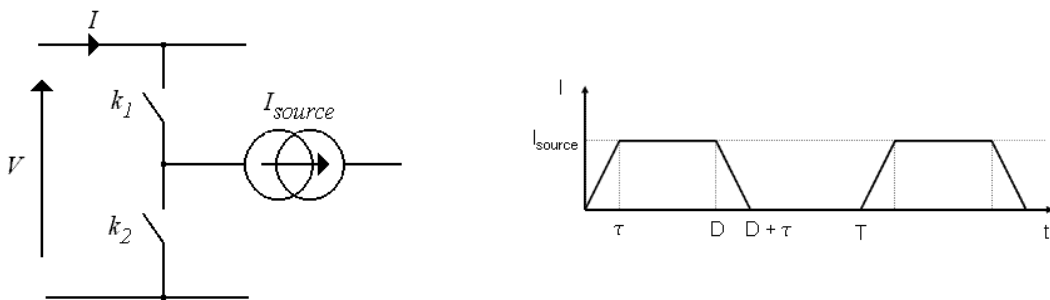


Figure 2-7 : Exemple d'une cellule de commutation et du courant  $I$  associé

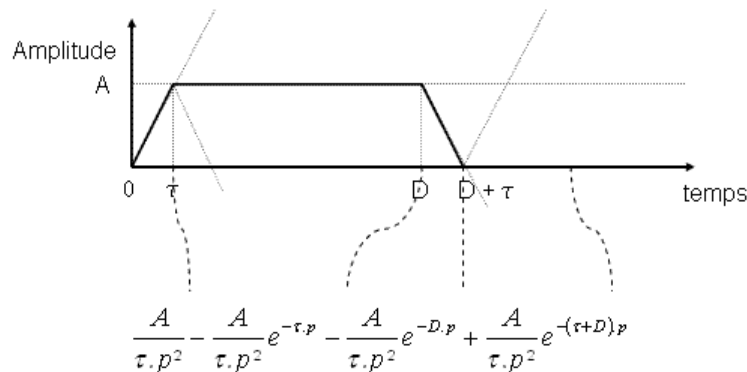


Figure 2-8 : Construction du trapèze par transformées de Laplace

Comme nous pouvons le constater, à partir de la transformée de Laplace d'une rampe de pente  $A/\tau$ , le signal trapézoïdal se construit simplement de manière géométrique. Pour développer le raisonnement et caractériser les sources de courant des générateurs équivalents nous nous référerons judicieusement à [SCHEICH-93] et à [REVOL-03].

L'approche fréquentielle directe par définition de générateurs équivalents est une méthode très efficace pour approximer le spectre des circuits électriques sur une gamme de fréquence étendue. L'intérêt de cette gamme de méthode résulte de sa rapidité. Pour des cas d'étude simples, n'associant pas de convertisseur statique, les estimations spectrales sont excellentes. Néanmoins, pour des cas

d'étude spécifiques, comme celui présenté Figure 2-5, où deux redresseurs à diodes sont connectés en parallèle via une résistance de ligne commune, cette gamme de méthode ne donne que des résultats approchés puisque les sources de courant calculées sont indépendantes les unes des autres.

### 2.3.2.2. Définition des équations de circuit

La famille des méthodes fréquentielles directes regroupe également une gamme d'approche liée à la définition des équations de circuit et à leur résolution. La représentation d'état joue à ce niveau un rôle majeur. Cette technique est basée sur un formalisme mathématique permettant de connaître l'évolution des variables sur un régime de fonctionnement donné grâce à la résolution d'un système d'équations différentielles [POPESCU-99]:

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = A(t).x(t) + B(t).U(t) & x = \text{vecteur d'état} \\ y(t) = C(t).x(t) + D(t).U(t) & y = \text{sortie du système} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Équation 2-6} \\ \text{Équation 2-7} \end{matrix}$$

En électronique de puissance, les grandeurs d'état sont des variables ne pouvant subir de discontinuité. Il s'agit donc des courants des inductances, des tensions aux bornes des capacités et des variables de commande. Le principe de cette méthode d'estimation spectrale directe consiste à définir un système d'état pour chaque topologie du circuit électrique (définie par la géométrie du circuit lors des commutations des interrupteurs), cf. Figure 2-9 :



Figure 2-9 : Interrupteur parfait, fermé ou ouvert

Le formalisme d'état est un outil particulièrement intéressant dans la panoplie des méthodes d'estimations spectrales directes, malgré sa difficulté de mise en place. Cette méthode mériterait de s'y intéresser, mais comme nous le préciserons plus loin, notre choix s'est orienté vers une méthode fréquentielle itérative.

### 2.3.3. Approches fréquentielles itératives

Les dispositifs non linéaires, comme les convertisseurs statiques, couplent les harmoniques de tension et de courant de rangs différents. Les approches fréquentielles directes précédemment discutées permettent d'approximer leur fonctionnement. Avec les approches fréquentielles itératives, la détermination des spectres est exacte. Les notions d'interaction entre convertisseurs de puissance ou d'interharmonique sont considérées grâce aux itérations.

Les deux principales méthodes itératives sont celles du point fixe et de Newton. La méthode du point fixe consiste à résoudre de manière itérative l'équation  $X_n = f(X_n)$ , où  $X_n$  est le vecteur inconnu (contenant le spectre de toutes les inconnues du problème). A chaque itération  $n$ , les sources de courant équivalentes aux composants non-linéaires sont mises à jour. De nombreux problèmes de divergence de l'algorithme de résolution peuvent apparaître [SMITH-98], et rendent cette technique du point fixe peu utilisée par rapport à celle de Newton.

La méthode de Newton résout de manière itérative l'équation  $f(X_n) = 0$ . Le but de cette technique est de minimiser pas à pas la fonction  $f$  (que nous appellerons fonction erreur). Lorsque  $f(X_n) = 0$ , la solution  $X_n$  du système est atteinte. L'utilisation de la méthode de Newton, pour la résolution harmonique itérative a été introduite il y a une vingtaine d'années environ [XIA-82]. La modélisation fréquentielle d'interactions harmoniques entre les charges non-linéaires a été présentée. Depuis ce temps, les All-Blacks ont pris la relève [ARRILLAGA-98] [BATHURST-99]. Leurs travaux ont permis d'apporter des modèles pour diverses structures de réseaux *HVDC* (High Voltage Direct Current), cf. Figure 2-10.

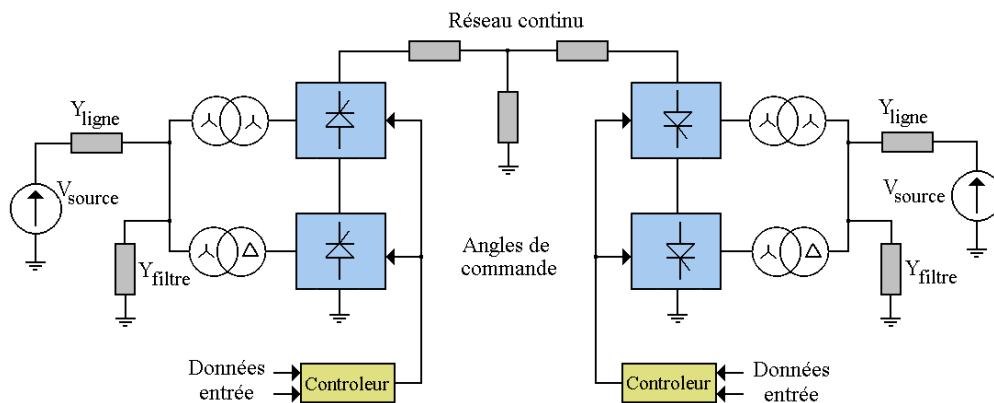


Figure 2-10 : Exemple de liaison HVDC – Schéma unifilaire

Au sein de la société ALSTOM Transport, les travaux de thèse de Marius Iordache [IORDACHE-02], ont permis de développer une méthode de Newton pour le calcul harmonique des chaînes de traction (association de ponts à commutation forcée).

### 2.3.4. Choix d'une méthode d'estimation spectrale

La diversité des méthodes d'estimations spectrales est à l'image de la pluridisciplinarité de l'électrotechnique. Il n'existe pas de bonne et de mauvaise méthode. Par contre, il existe des méthodes plus adaptées que d'autres vis-à-vis des études de chacun. Le choix d'une méthode doit donc se faire en fonction des objectifs ciblés. Dans le cadre des études des comportements dynamique et harmonique des réseaux d'alimentation électrique de tramway, la gamme spectrale nous intéressant est comprise entre 0 Hz et 25 kHz. Cette gamme de fréquence englobe ainsi les fréquences des appareils

de signalisation (10 kHz – 20 kHz) et les fréquences des onduleurs des chaînes de traction (10 kHz – 25 kHz). La précision des estimations spectrales réalisées dans cette gamme de fréquence est importante. Les approches fréquentielles directes semblent moins intéressantes que les approches temporelles indirectes ou les approches fréquentielles itératives car elles sont basées sur des approximations des systèmes non-linéaires.

Pour nos cas d'étude, les études spectrales via des analyses temporelles ont par ailleurs quelques lacunes par rapport aux approches fréquentielles itératives. Les temps de calcul nécessaires pour simuler un système, nous incitent à nous orienter vers une méthode itérative de type Newton, d'autant plus que l'axe de recherche a déjà été ouvert par Marius Iordache dans le cadre de sa thèse. Le chapitre 5 sera dédié à cette thématique.

## **2.4. Modélisation des systèmes de transmission**

Dans le monde du tramway, les systèmes de transmission d'énergie sont à l'heure actuelle composés de *LAC* (ou troisième rail) et/ou d'*APS* (dans les deux cas de figure, l'insertion de feeders pour le soutien de la tension est possible). Ces systèmes sont les vecteurs de la distribution de l'énergie électrique. Ils doivent être modélisés précisément car leur signature spectrale est déterminante dans les études des comportements dynamique et harmonique des réseaux d'alimentation électrique des tramways.

Avant de s'attacher à l'état de l'art de la modélisation des systèmes de transmission, il est important de rappeler les spécificités des structures à caractériser (*LAC* et *APS*). Comme nous l'avons mentionné dans le premier chapitre, le sol est un conducteur à part entière du système (existence de courants vagabonds). Notons par ailleurs les disparités géométriques et physiques des divers conducteurs du système : les lignes aériennes de contact sont des conducteurs cylindriques réalisés en cuivre (perméabilité relative  $\mu_r = 1$ ), alors que les rails de roulement ont un profil de type 35GP et sont réalisés en fer ( $\mu_r \approx 350$ ). La méthode de modélisation retenue pour caractériser les systèmes de transmission utilisés dans le monde du tramway devra ainsi intégrer toutes ces spécificités.

Parmi les méthodes de modélisation des systèmes de transmission couramment employées, nous pouvons distinguer quatre familles : les méthodes issues des travaux de Carson / Pollaczek, la méthode de la profondeur de pénétration complexe, la méthode *PEEC* (Partial Element Equivalent Circuit), et la méthode des éléments finis.



### 2.4.1. Méthode de Carson / Pollaczek

En 1926, Carson et Pollaczek furent les initiateurs des études des systèmes de transmission intégrant le sol comme conducteur de retour [CARSON-26] [POLLACZEK-26]. Leurs travaux furent majoritairement utilisés dans le monde du transport et de la distribution de l'énergie électrique, mais ils peuvent être transposables au domaine ferroviaire [HILL-93].

#### 2.4.1.1. Inductance propre

Prenons un conducteur unique situé au dessus d'un sol amagnétique et parfaitement conducteur (Figure 2-11). En faisant circuler un courant par ce conducteur, et en imposant un retour par le sol, un circuit électrique peut être défini : cf. Figure 2-12. L'inductance propre du conducteur est donnée par  $L_1$  dans l'Équation 2-8.

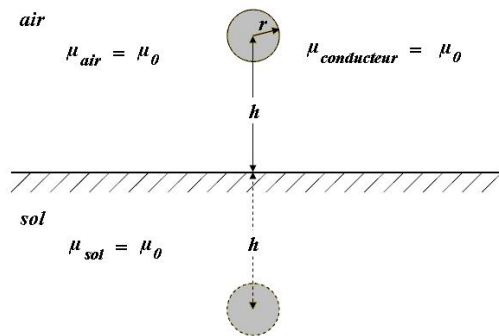


Figure 2-11 : Conducteur cylindrique au dessus d'un plan de masse

$$L_1 = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{2h}{r}\right) \quad [H/m]$$

avec  $\mu_0$  = perméabilité du vide  
 $h$  = hauteur conducteur - sol  
 $r$  = rayon du conducteur

Équation 2-8 : Méthode des images

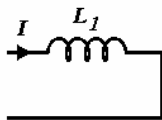
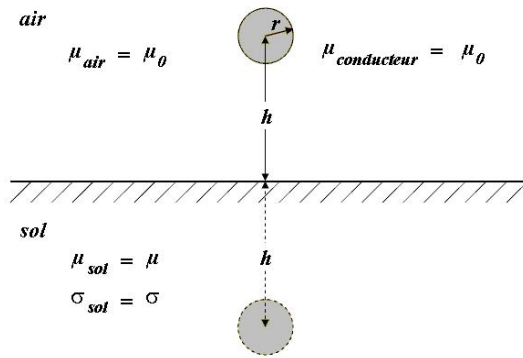


Figure 2-12 : Schéma électrique équivalent d'un conducteur cylindrique au dessus d'un plan de masse

Le premier terme de l'inductance  $L_1$  correspond à l'inductance interne du conducteur. La géométrie et la position du conducteur n'influent pas sur cette valeur. Le second terme est conditionné par le rayon du conducteur et sa hauteur par rapport au sol.

Carson et Pollaczek ont trouvé des solutions pour modéliser les champs magnétiques dans l'air et dans le sol (doté d'une perméabilité  $\mu$  et d'une conductivité  $\sigma$ ), grâce à un mariage entre les équations de Maxwell, les équations de circuit et les conditions aux limites. L'inductance propre  $L_1'$  du conducteur cylindrique est ainsi donnée par l'Équation 2-9.



$$L_1' = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{2h}{r}\right) + \frac{\mu}{\pi} \cdot J_{sol} \quad [\text{H/m}]$$

avec

$$J_{sol} = \int_0^\infty \frac{\exp(-2hx)}{x + \sqrt{x^2 + j\omega\mu\sigma}} \cdot dx$$

$J_{sol}$  est appelé l'intégrale de Carson

Figure 2-13 : Conducteur cylindrique au dessus d'un sol réel

Équation 2-9

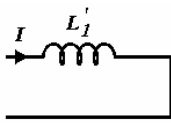
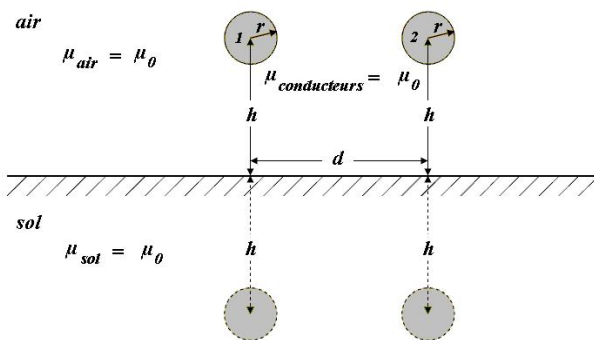


Figure 2-14 : Schéma électrique équivalent d'un conducteur cylindrique au dessus d'un sol réel

L'intégrale de Carson  $J_{sol}$  (Équation 2-9) définit la variation de l'inductance propre du conducteur  $L_1$  en fonction de la diffusion des courants dans le sol, en tenant compte de ses propriétés électrique et magnétique. Cette intégrale est une base de calcul dans certains logiciels : EMTP® par exemple [EMTP-98].

#### 2.4.1.2. Inductance mutuelle

Prenons à présent deux conducteurs parallèles, situés au dessus d'un sol amagnétique et parfaitement conducteur (Figure 2-15). Le circuit électrique équivalent est donné Figure 2-16. L'inductance mutuelle  $M_{1-2}$  entre les conducteurs 1 et 2 est donnée par l'Équation 2-10.



$$M_{1-2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{4h^2}{d^2} + 1}\right) \quad [\text{H/m}]$$

avec  $d$  = distance horizontale entre les conducteurs

$h$  = hauteur conducteurs - sol

Figure 2-15 : Deux conducteurs cylindriques au dessus d'un plan de masse

Équation 2-10

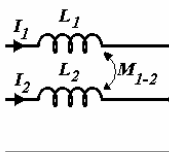
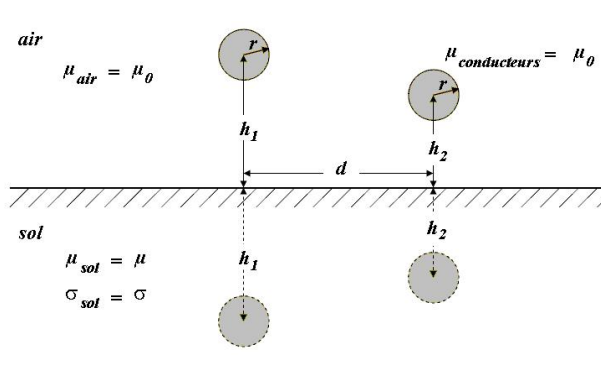


Figure 2-16 : Schéma électrique équivalent de deux conducteurs cylindriques au dessus d'un plan de masse

En considérant à présent le sol comme un conducteur réel doté d'une perméabilité  $\mu$  et d'une conductivité  $\sigma$ , Carson a défini l'inductance mutuelle  $M_{1-2}$  par l'Équation 2-11.



$$M_{1-2}' = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{(h_1 + h_2)^2 + d^2}{(h_1 - h_2)^2 + d^2}}\right) + \frac{\mu}{\pi} \cdot J_m \quad [\text{H/m}]$$

avec

$$J_m = \int_0^\infty \frac{\cos(x.d) \cdot \exp(-(h_1 + h_2).x)}{x + \sqrt{x^2 + j.\omega.\mu.\sigma}} \cdot dx$$

et  $h_1$  = hauteur conducteur 1 - sol  
 $h_2$  = hauteur conducteur 2 - sol

Figure 2-17 : Deux conducteurs cylindriques au dessus d'un sol conducteur

Équation 2-11

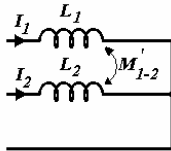


Figure 2-18 : Schéma électrique équivalent de deux conducteurs cylindriques au dessus d'un sol réel

#### 2.4.1.3. Application aux systèmes de transmission de tramway

Pour des cas d'étude assez simple, l'intégrale de Carson donne de bons résultats dans une gamme de fréquence relativement réduite (jusqu'à quelques kHz) [WANG-01]. Cependant, la résolution numérique de l'intégrale de Carson pose certains problèmes de précision lorsque la fréquence des courants d'excitation augmente ou lorsque les conducteurs deviennent trop éloignés les uns les autres [DOMMEL-85].

Comme nous le verrons également au travers des autres méthodes de modélisation des systèmes de transmission, une des difficultés intrinsèques communes à toutes les approches repose dans une bonne estimation des paramètres du sol. Sa géométrie est irrégulière, sa composition est hétérogène, et ses propriétés sont très variables (sa résistivité peut varier de 0,1 à  $10^6 \Omega.m$ ). La modélisation du sol est ainsi très approchée. Certains travaux ont tout de même été réalisés afin d'adapter les formules de Carson à des modèles de terre plus élaborés [BICKFORD-76].

#### 2.4.2. Méthode de la profondeur de pénétration complexe

Cinquante ans après la publication des travaux de Carson, Gary proposa une nouvelle approche [GARY-76] dans laquelle il introduisit la profondeur de pénétration complexe  $p$ , cf. Équation 2-12. Cette grandeur complexe définit une profondeur de pénétration des courants dans le sol tenant en

compte la résistivité du milieu et la fréquence des courants d'excitation. Cette grandeur s'ajoute à la distance séparant les conducteurs aériens de la terre. Le sol est ainsi modélisé via l'éloignement des conducteurs. Cette approche fut confortée par Deri quelques années plus tard [DERI-89].

La Figure 2-19 présente la géométrie d'un système de deux conducteurs au dessus du sol. Un plan de masse virtuel peut être dessiné, en regard de la profondeur de pénétration complexe  $p$ . L'inductance propre  $L_1$  du conducteur 1 est donnée par l'Équation 2-12 :

$$L_1 = \frac{\mu_0}{8\pi} + \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\frac{2(h_1 + p)}{r}\right) \quad [\text{H/m}]$$

avec

$$p = \sqrt{\frac{\rho}{j\omega\mu_0}}$$

et

- $h_1$  = hauteur conducteur 1 - sol
- $h_2$  = hauteur conducteur 2 - sol
- $p$  = profondeur de pénétration complexe
- $\rho$  = résistivité du sol

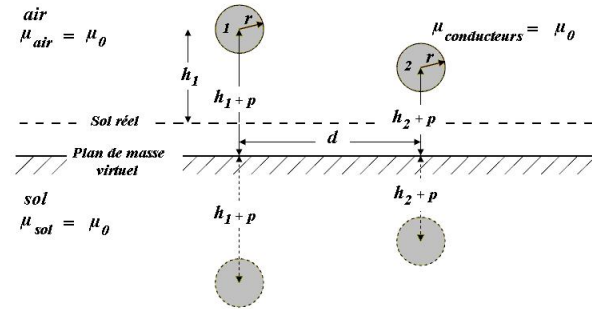


Figure 2-19 : Géométrie d'un système de transmission selon Gary & Deri

Équation 2-12

La Figure 2-20 donne le schéma électrique équivalent de la géométrie ci-dessus. Les retours des courants  $I_1$  et  $I_2$  se font via un conducteur parfait (inductance propre nulle). L'Équation 2-12 est quasiment identique à celle déjà présentée dans l'Équation 2-8 (Méthodes des images). La seule différence réside dans la distance qui sépare les conducteurs du plan de masse *virtuel* : la profondeur de pénétration complexe dans le sol s'ajoute à la distance réelle entre le sol et les câbles aériens.

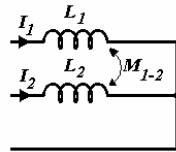


Figure 2-20 : Schéma électrique équivalent de deux conducteurs cylindriques au dessus du sol, selon Gary & Deri

L'inductance mutuelle  $M_{1-2}$  s'écrit selon l'Équation 2-13.

$$M_{1-2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \ln\left(\sqrt{\frac{(h_1 + h_2 + 2p)^2 + d^2}{(h_1 - h_2)^2 + d^2}}\right) \quad [\text{H/m}]$$

Équation 2-13

La méthode de la profondeur de pénétration complexe donne des résultats relativement similaires à la méthode de Carson, avec des expressions plus simples [WANG-01]. Les structures pouvant être étudiées avec cette méthode restent néanmoins relativement triviales, et la complexification de la géométrie et la diversité des matériaux utilisés dans les structures d'alimentation électrique nécessitent de s'intéresser à d'autres méthodes.

### 2.4.3. Méthode PEEC

La méthode *PEEC* (Partial Element Equivalent Circuit) développée par Ruehli en 1972 permet de modéliser des conducteurs amagnétiques de toute forme à l'aide de schémas électriques équivalents composés de résistances et d'inductances couplées [RUEHLI-72]. La méthode *PEEC* suppose une distribution uniforme du courant au sein de chaque conducteur. Pour cette raison, les conducteurs du système d'alimentation sont subdivisés en 'n' conducteurs élémentaires (de formes rectangulaires) couplés les uns aux autres. Les effets de la fréquence des courants d'excitation ou de la proximité de conducteurs adjacents peuvent ainsi être pris en compte. A la différence des éléments finis, seuls les conducteurs du système sont maillés, d'où un gain de temps et de mémoire lors de la résolution informatique. Les Figure 2-21 et Figure 2-22 présentent par exemple un troisième rail maillé.

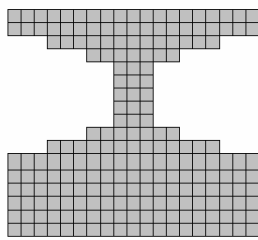


Figure 2-21 : Troisième rail subdivisé en 'n' conducteurs élémentaires

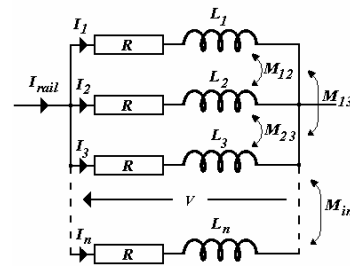


Figure 2-22 : Schéma électrique équivalent des 'n' conducteurs couplés

La méthode *PEEC* est fiable, rapide et très efficace. Elle peut être utilisée en électronique de puissance pour la modélisation et l'optimisation des connexions électriques [MARTIN-03]. Malheureusement, à l'heure actuelle, la méthode *PEEC* n'intègre pas la présence de conducteurs magnétiques dans l'environnement du système multiconducteurs, ce qui représente une grosse lacune pour la modélisation des structures ferroviaires.

### 2.4.4. Méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis (*MEF*) est utilisée dans de nombreuses disciplines. Elle permet d'approcher le résultat d'un système d'équations aux dérivées partielles par sa résolution sur le domaine discrétisé. Dans le cadre des systèmes de transmission, les équations à résoudre sont les équations de Maxwell, régissant les phénomènes électromagnétiques.

Depuis une quinzaine d'années, de nombreuses personnes ont apporté leur contribution aux études des systèmes de transmission avec la méthode des éléments finis [CRISTINA-89] [TRANTAFYLLIDIS-99] [PAPAGIANNIS-00] [WANG-01]. Bien que la MEF implique une discrétisation de l'intégralité du système d'étude, cette méthode offre beaucoup d'avantages par rapport aux approches analytiques ou à la méthode *PEEC*, car l'environnement des conducteurs peut être pris en compte fidèlement (présence du sol, proximité d'un conducteur magnétique ; discontinuité des paramètres des matériaux).

Les structures de systèmes de transmission complexes, telles que les alimentations par le sol mariant conducteurs magnétiques et amagnétiques peuvent ainsi être modélisées aisément.

La méthode des éléments finis, couplée à la méthode *MTL* (Multiconductor Transmission Line, que nous décrirons dans le chapitre 3) va nous permettre d'établir des modèles réalistes pour les systèmes de transmission, dans la gamme de fréquence nous intéressant (0 Hz – 25 kHz). Les phénomènes d'interaction de puissance et de signalisation pourront être ainsi précisément étudiés. Cette méthode – cf. chapitre 3 – est basée sur la construction d'un circuit équivalent par unité de longueur. En pratique, le but de la méthode est de déterminer les matrices inductance, capacité et résistance ( $L$ ,  $C$  et  $R$ ) d'un système composé de conducteurs multiples. La Figure 2-23 présente à titre d'illustration la représentation d'un système composé de 3 conducteurs par la technique *MTL*. Le conducteur (0) est le conducteur de référence du système : son inductance propre est supposée nulle.

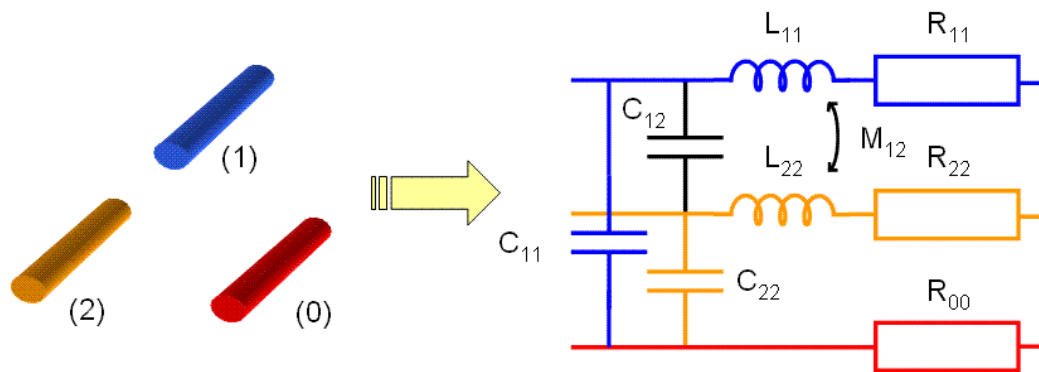


Figure 2-23 : Illustration du principe de la méthode MTL

#### 2.4.5. Choix d'une méthode de modélisation des systèmes de transmission

La méthode de Carson et celle de la profondeur de pénétration complexe permettent de caractériser le comportement inductif de structures simples (du type lignes haute tension). Ces méthodes sont d'ailleurs généralement utilisées dans de nombreux logiciels dédiés aux réseaux électriques (EMTP®, PSCAD®, ETAP®, EDSA®). Lorsque les structures deviennent plus complexes (telles que les Alimentations Par le Sol) ou lorsqu'elles intègrent des conducteurs magnétiques, la méthode de Carson ou celle de Gary / Déri ne sont plus adaptées. La méthode *PEEC* permet de traiter des géométries spécifiques, elle semble donc être une méthode très intéressante pour caractériser des systèmes de transmission amagnétiques. L'intégration de conducteurs magnétiques dans cette méthode serait très appréciable. Les éléments finis permettent quant à eux de modéliser des structures complexes intégrant des conducteurs magnétique comme amagnétique. Cette méthode paraît être ainsi la plus adaptée à notre thématique.

## *Chapitre 3*

## *Table des matières du chapitre 3 :*

3.1. Modélisation d'une ligne aérienne de contact .....	57
3.1.1. Présentation et détail de la structure .....	57
3.1.2. Approche par les éléments finis .....	58
3.2. ALImentation Statique par le Sol (ALISS) .....	68
3.2.1. Présentation et détail de la structure .....	68
3.2.2. Matrices caractéristiques .....	69
3.2.3. Comparaisons LAC / ALISS .....	70
3.3. Modélisation des transformateurs de sous-station .....	71
3.3.1. Matrices primitives .....	72
3.3.2. Transformateur $Dy_n$ .....	73
3.3.3. Transformateur $Ddy_n$ .....	76
3.3.4. Applications .....	79
3.4. Points clefs sur les structures passives modélisées .....	80



## **Chapitre 3 : Des modèles temporels et fréquentiels pour les structures passives**

L'étude des comportements dynamique et harmonique des réseaux d'alimentation électrique des tramways nécessite d'avoir un regard précis et localisé sur les composants du système. Le chapitre 2 nous ayant permis de cerner les différents moyens de modéliser les structures d'alimentation des tramways, le but de ce nouveau chapitre est maintenant de nous appliquer à la modélisation effective de ces structures. Une Ligne Aérienne de Contact (*LAC*) et l'Alimentation Statique par le Sol (*ALISS*) développée par ALSTOM Transport seront ainsi modélisées puis comparées. Les transformateurs de sous-station seront ensuite analysés.

### **3.1. Modélisation d'une ligne aérienne de contact**

La méthode des éléments finis a été retenue pour modéliser les systèmes de transmission des réseaux de tramway car elle permet de prendre en compte la présence du sol et des conducteurs magnétiques (tels que les rails de roulement), cf. paragraphe 2.4.

#### **3.1.1. Présentation et détail de la structure**

La structure étudiée est celle d'une voie unique fortement simplifiée. La Figure 3-1 présente la vue en coupe du système. Le câble porteur, les poteaux, les isolateurs, les haubans et les consoles ne sont pas modélisés. Les détails de la structure sont ensuite donnés dans le Tableau 3-1.

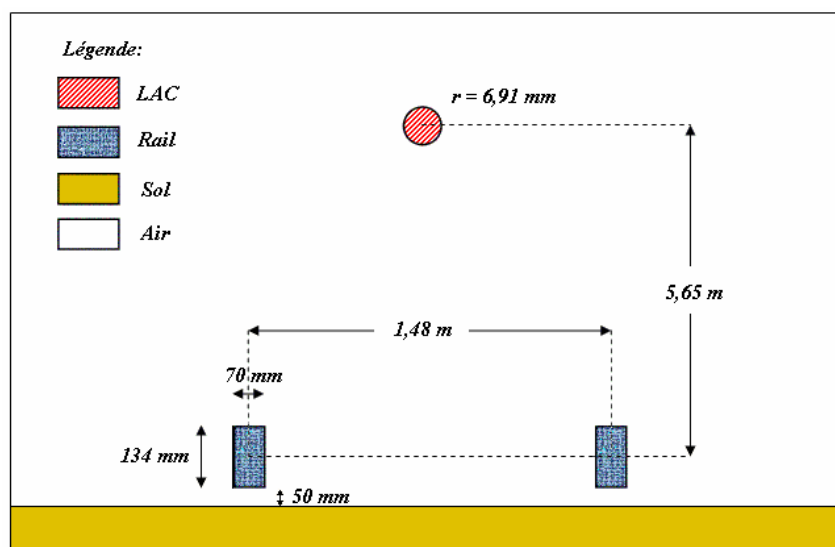


Figure 3-1 : Coupe de la structure de LAC étudiée

<i>Référence</i>	<i>Matériau</i>	<i>Section [mm<sup>2</sup>]</i>	<i>Résistivité [Ω.m]</i>	<i>Perméabilité relative [-]</i>
<i>LAC</i>	Cuivre	150	$1,785 \cdot 10^{-8}$	1
Rail	Fer	9400	$222 \cdot 10^{-8}$	350
Sol	Terre	Variable	100	1

Tableau 3-1 : *LAC* - Caractéristiques des matériaux utilisés

Nous noterons que la section du sol n'est pas spécifiée dans le Tableau 3-1. Le sol est en effet un conducteur particulier. Comme nous allons le voir dans le prochain paragraphe, le sol va être modélisé par un conducteur équivalent semi-cylindrique, dont le rayon dépend de la fréquence du système. C'est pour cette raison que la mention 'Variable' est inscrite dans le tableau. Par ailleurs, la résistivité du sol a été choisie à  $100 \Omega.m$ . C'est une valeur moyenne usuellement utilisée en France dans la caractérisation d'un sol<sup>3</sup> (à titre de comparaison, les américains utilisent  $200 \Omega.m$ ). Enfin, la valeur de la perméabilité relative du sol a été supposée unitaire [WANG-01]. Le paragraphe 3.1.2.3 présentera une étude de sensibilité des résultats de la *LAC* aux paramètres du sol.

### 3.1.2. Approche par les éléments finis

Le cas d'étude de la *LAC* s'inscrit dans une problématique générale qui est celle des lignes de transmission à plusieurs conducteurs (Multiconductor Transmission Line *MTL* [CLAYTON-94]). L'analyse du système doit se scinder en deux étapes. La première consiste à déterminer les inductances propres et les inductances mutuelles des lignes de transmission en fonction de la fréquence d'excitation. La seconde étape est une analyse électrostatique du système, afin de déterminer les capacités parasites entre les différents conducteurs. Ces matrices inductance et capacité renseignent intégralement le comportement du système *LAC*. Ainsi, les couplages électromagnétiques et électrostatiques entre les conducteurs sont pris en compte. Une matrice résistance peut venir compléter les précédentes matrices.

Pour l'ensemble des calculs de champs magnétique et électrique nécessaires à nos études, nous utiliserons le logiciel FLUX2D®, qui est un logiciel de Conception Assistée par Ordinateur (*CAO*), basé sur une méthode d'éléments finis. Ce logiciel calcule sur des sections planes (problèmes plans ou problèmes à symétrie de révolution) les états magnétique, électrique ou thermique des dispositifs. Ces états permettent d'accéder à de nombreuses grandeurs globales ou locales : champ, potentiel, flux, énergie, force, etc.

<sup>3</sup> La résistivité d'un sol peut varier de  $0,1$  à  $10^6 \Omega.m$ , en fonction de la composition du milieu et de son taux d'humidité [ESCANE-99].

### 3.1.2.1. Calcul de la matrice inductance

Pour établir la matrice inductance du système *LAC*, nous allons nous baser sur les différents flux magnétiques vus par les conducteurs. Selon la méthode *MTL*, le schéma de la structure présenté Figure 3-1 peut s'associer à un schéma électrique inductif équivalent :

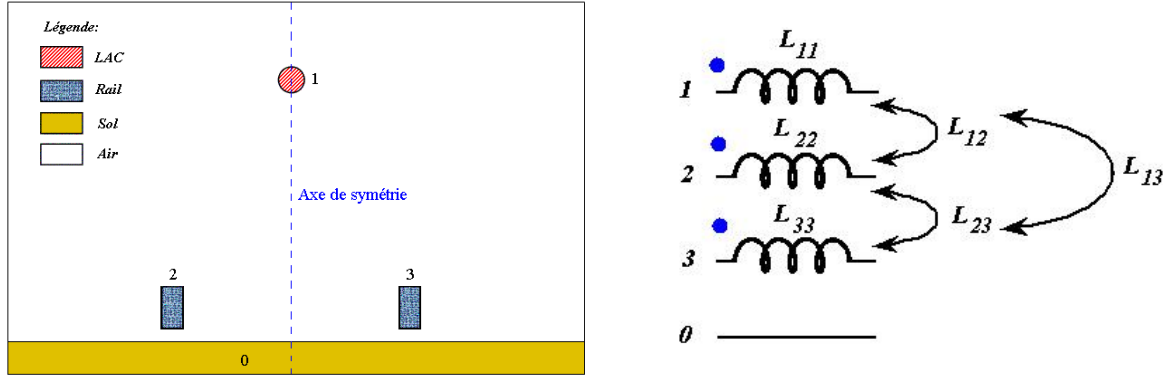


Figure 3-2 : Schéma inductif du système *LAC* étudié

Une symétrie du problème peut être constatée selon l'axe vertical de la *LAC*. Le sol a été choisi comme le conducteur de référence  $\theta$ . Cela signifie que le sol est considéré comme un conducteur d'inductance propre nulle. D'un point de vue physique, la présence du sol dans le système modifie la répartition des courants – et donc des inductances – dans les conducteurs. Le sol est donc bien pris en compte dans la caractérisation du système, bien qu'il soit dépourvu d'inductance propre. Une matrice inductance  $\mathbf{L}$  symétrique (Équation 3-1) peut être définie par unité de longueur, rassemblant les inductances propres et mutuelles du système *LAC*.

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{pmatrix} \quad \text{Équation 3-1}$$

Pour remplir cette matrice, chaque terme est calculé à partir des différents flux entre les conducteurs. La procédure de résolution est détaillée dans [CLAYTON-94]. Cette méthode consiste à créer successivement différentes boucles de courant, en associant un conducteur au conducteur de référence du système. Dans notre cas d'étude, trois boucles de courant seront créées successivement. La Figure 3-3 présente un exemple de boucle de courant entre le conducteur 1 et le conducteur de référence.

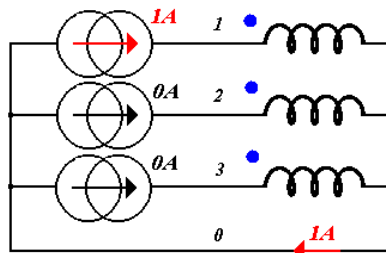


Figure 3-3 : Boucle de courant entre les conducteurs 1 et 0

Les conducteurs non alimentés doivent être connectés à une source de courant nulle, de telle sorte que les courants induits dans chaque conducteur soient nuls. Cette remarque est primordiale dans le cas d'utilisation de FLUX2D®, car ce dernier reboucle les conducteurs massifs à l'infini. Cela signifie que les extrémités de chaque conducteur sont ramenées au même potentiel électrique grâce à un connecteur virtuel n'ayant aucune influence magnétique sur le reste du système. La somme des courants induits dans chaque conducteur est nulle, mais chaque terme peut être différent de zéro. Une erreur va alors apparaître sur les différents flux. Cette considération étant prise en compte, dans le cas de la Figure 3-3, les différentes équations régissant les flux magnétiques entre les conducteurs se mettent sous la forme des Équation 3-2 et Équation 3-3. Une démonstration des équations est proposée dans l'Annexe I.

$$\phi_k = \frac{D}{i_0} \iint_{\Omega_0} \vec{A} \cdot \vec{J}_0 \cdot d\Omega_0 - \frac{D}{i_k} \iint_{\Omega_k} \vec{A} \cdot \vec{J}_k \cdot d\Omega_k \quad \text{avec} \quad J_k = \frac{i_k}{\Omega_k} \quad \text{Équation 3-2}$$

$$\phi_k = L_{k1} \cdot i_1 \quad \forall k \in [1,3] \quad (i_n = 0 \quad \forall n \in [2,3]) \quad \text{Équation 3-3}$$

$\phi_k$  représente le flux entre le conducteur  $k$  et le conducteur de référence,  $D$  est la profondeur d'étude du système (souvent prise égale à 1 m),  $i_k$  est le courant dans  $k$ ,  $\vec{A}$  est le potentiel vecteur magnétique,  $\vec{J}_k$  est la densité de courant surfacique dans  $k$ ,  $L_{ij}$  est l'inductance mutuelle entre les conducteurs  $i$  et  $j$ , et  $\Omega_k$  est la surface du conducteur  $k$ .

Les inductances propres et mutuelles composant la matrice inductance  $\mathbf{L}$  sont donc aisément déduites à partir des flux entre les conducteurs. Ces flux sont obtenus de manière numérique avec le logiciel FLUX2D. Le maillage du système, présenté Figure 3-4, doit bien évidemment être en accord avec la fréquence d'excitation du système. Les effets de peau et de proximité sont en effet très influents dans la caractérisation du système. Lorsque la fréquence augmente, les courants sont rejetés à la périphérie des conducteurs. La 'géométrie équivalente' du système est ainsi différente, induisant des modifications d'inductance.

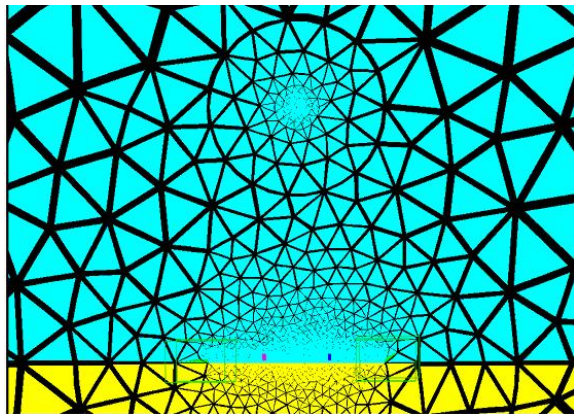


Figure 3-4 : Maillage du système LAC

La limite extérieure du domaine est soumise aux conditions de Dirichlet, c'est-à-dire qu'un potentiel vecteur magnétique nul y est imposé. Les lignes d'équi-flux, et le champ magnétique (et donc aussi l'induction) sont tangentiels à cette limite extérieure, cf. Figure 3-5 et Figure 3-6.

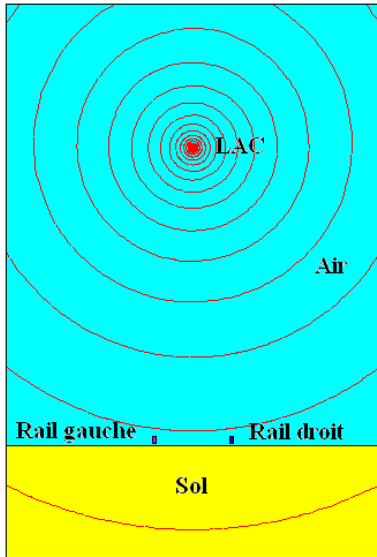


Figure 3-5 : Illustration des lignes d'équi-flux suite à l'alimentation de la boucle LAC-Sol (10 kHz), vue zoomée

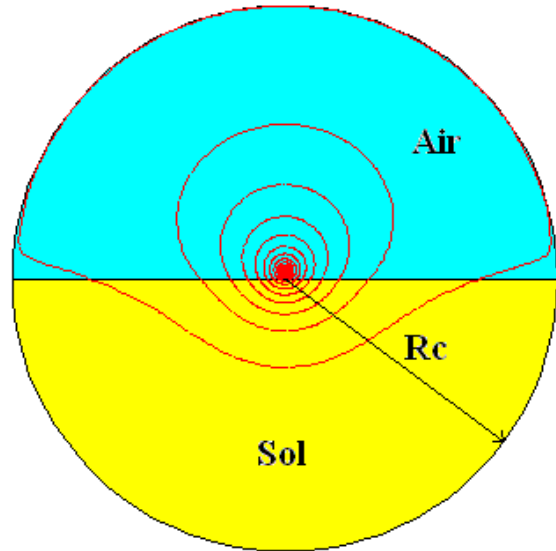


Figure 3-6 : Conditions aux limites : alimentation de la boucle LAC-Sol (10 kHz), vue sur le domaine d'étude complet

Le sol est un conducteur à part entière du système. Il sera modélisé comme un matériau semi-cylindrique, dont le rayon  $R_c$  dépend de la profondeur de pénétration complexe du milieu. Selon [WANG-01],  $R_c$  peut être choisi à 6 fois la valeur absolue de la profondeur de pénétration complexe (ce qui revient approximativement à 4 fois la valeur de l'épaisseur de peau) :

$$p_{sol} = \sqrt{\frac{\rho_{sol}}{2 \cdot \pi \cdot j \cdot f \cdot \mu_{sol}}} \quad \text{Profondeur de pénétration complexe} \quad \text{Équation 3-4}$$

$$\delta_{sol} = \sqrt{\frac{\rho_{sol}}{\pi \cdot f \cdot \mu_{sol}}} = \frac{p_{sol}}{\sqrt{2} \cdot j} \quad \text{Epaisseur de peau} \quad \text{Équation 3-5}$$

La Figure 3-6 permet de se rendre compte de la dimension du système. Une attention particulière doit être portée sur le maillage du système puisque les dimensions sont très disparates. Par exemple, pour une fréquence d'excitation du système de 10 kHz, le rayon  $R_c$  à retenir pour l'étude est d'environ 200 m (4 fois l'épaisseur de peau). La cohabitation de telles grandeurs avec les tailles et les espacements des conducteurs (de l'ordre du m, cf. Figure 3-1) doit donc être traitée rigoureusement.

Les matrices inductances obtenues pour les différentes fréquences sont données ci-après. Nous rappelons que ces matrices sont symétriques.

$$f = 10\text{Hz} \quad L = \begin{pmatrix} 2,57 & 1,18 & 1,18 \\ 1,18 & 9,89 & 1,47 \\ 1,18 & 1,47 & 9,89 \end{pmatrix} \mu\text{H/m} \quad f = 50\text{Hz} \quad L = \begin{pmatrix} 2,41 & 1,02 & 1,02 \\ 1,02 & 5,69 & 1,30 \\ 1,02 & 1,30 & 5,69 \end{pmatrix} \mu\text{H/m}$$

$$f = 100\text{Hz} \quad L = \begin{pmatrix} 2,34 & 0,95 & 0,95 \\ 0,95 & 4,54 & 1,22 \\ 0,95 & 1,22 & 4,54 \end{pmatrix} \mu\text{H/m}$$

$$f = 1\text{kHz} \quad L = \begin{pmatrix} 2,09 & 0,72 & 0,72 \\ 0,72 & 2,13 & 0,98 \\ 0,72 & 0,98 & 2,13 \end{pmatrix} \mu\text{H/m}$$

$$f = 10\text{kHz} \quad L = \begin{pmatrix} 1,87 & 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & 1,43 & 0,78 \\ 0,50 & 0,78 & 1,43 \end{pmatrix} \mu\text{H/m}$$

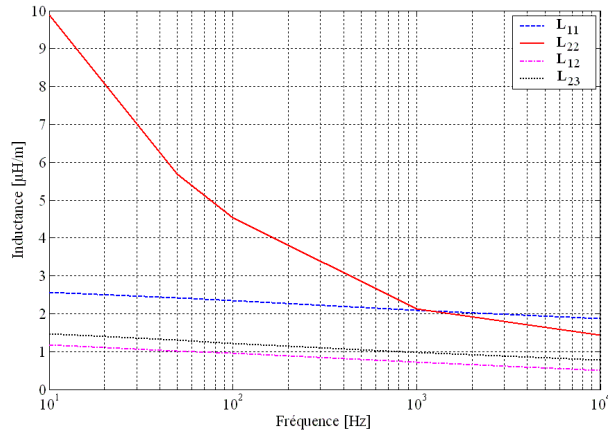


Figure 3-7 : Variation des inductances propres et mutuelles du système LAC avec la fréquence

Lorsque la fréquence des courants d'excitation varie, les termes de la matrice les plus sensibles sont les inductances propres des rails de roulement (conducteurs 2 et 3).

Remarque :  $L_{22}$  et  $L_{33}$  sont identiques car le système est symétrique par rapport à l'axe vertical passant par la LAC.

A 10 Hz, les inductances propres des rails de roulement ( $L_{22}$  et  $L_{33}$ ) sont 4 fois plus importantes que celle de la LAC, alors qu'à 1000 Hz, elles sont identiques. Ces résultats seront comparés à ceux obtenus de manière plus pragmatique dans le paragraphe suivant. Une troisième comparaison pourra aussi s'effectuer grâce au logiciel IMAFEB® d'ELBAS®, basé sur les équations de Carson, utilisé au sein de la société ALSTOM.

### 3.1.2.2. Impacts de la modélisation de la LAC par les éléments finis

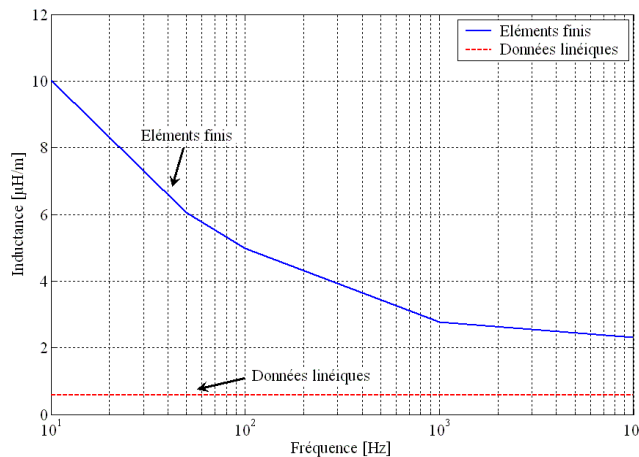
#### 3.1.2.2.1. Comparaisons avec des paramètres linéiques de câbles

La plupart du temps, les valeurs d'inductances linéiques de câbles, définies par les constructeurs, sont directement intégrées dans les schémas équivalents. Ces valeurs sont généralement définies à 50-60 Hz, dans un milieu ouvert. Le Tableau 3-2 résume par exemple les données recueillies sur des données de constructeurs :

	$R$ [ $\text{m}\Omega/\text{m}$ ]	$L$ [ $\mu\text{H}/\text{m}$ ]
LAC : Câble Pirelli 150mm <sup>2</sup>	0,119	0,215
Rail de roulement Cogifer, de type 35 GP	0,015	0,360

Tableau 3-2 : Caractéristiques des conducteurs issues des constructeurs

Si l'on calcule par exemple l'inductance d'une boucle de 1 m entre la *LAC* et l'un des rails de roulement, à l'aide des éléments finis ou à l'aide d'une analyse simple des données des constructeurs, la Figure 3-8 peut être dressée :



Les résultats des deux types de modélisation sont nettement différents. Les paramètres des conducteurs donnés par les constructeurs ne sont pas valables pour notre cas d'étude. L'inductance propre du conducteur est généralement calculée à 50 – 60 Hz dans un environnement amagnétique, retiré du sol.

Figure 3-8 : Evolution avec la fréquence de l'inductance d'une boucle de 1 m entre la *LAC* et un rail de roulement

Le modèle simple, basé sur les caractéristiques des matériaux données par les constructeurs, n'est pas acceptable pour traiter notre problématique. Sur la gamme de fréquence considérée (10 Hz à 10 kHz), l'utilisation des données linéiques (inductances et résistances) pour caractériser un régime de fonctionnement dynamique d'un réseau de tramway modifierait les constantes de temps d'établissement des régimes transitoires. Pour illustrer les conséquences du choix du type de modélisation, le scénario d'un court-circuit sur la ligne de tramway de la Rochelle sera présenté dans le chapitre 4.

#### 3.1.2.2.2. Comparaisons avec l'Outil IMAFEB® d'ELBAS®

Le logiciel IMAFEB de la société ELBAS® est utilisé au sein d'ALSTOM Transport Systèmes pour la détermination fréquentielle des inductances et des résistances linéiques, et pour la répartition du champ magnétique sur des systèmes de lignes aériennes de contact. Ce logiciel prend en compte la présence du sol via un modèle de Carson [CARSON-26]. Les conducteurs du système doivent alors être modélisés comme des conducteurs cylindriques. Cette approximation se justifie dans le cas de la modélisation d'un système de transmission de type *LAC*, mais dans le cas de structures plus complexes telles qu'*ALISS*, la géométrie et la position des conducteurs est importante. Le logiciel IMAFEB n'est donc pas adapté pour traiter de tels cas de figure.

Pour le calcul des inductances, les champs magnétiques sont calculés selon la loi de Biot et Savart, qui requiert une perméabilité constante et égale à celle du vide :



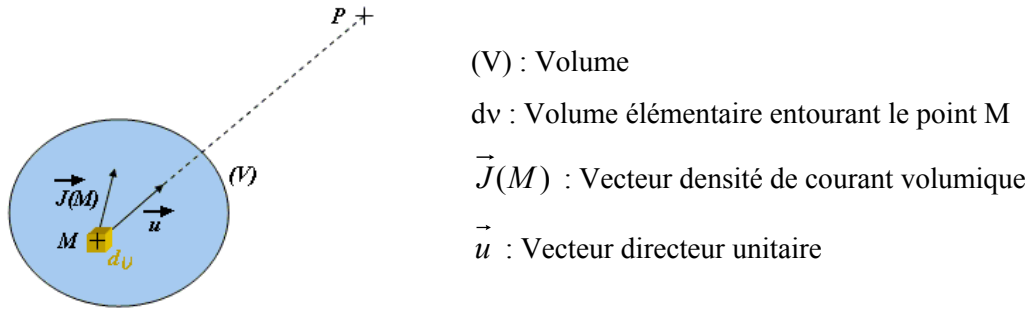


Figure 3-9 : Illustration de la loi de Biot et Savart

Une distribution volumique continue de courants  $\vec{J}(M)$  sur un volume  $(V)$  crée un potentiel vecteur magnétique en un point  $P$  de l'espace :

$$\vec{A}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint_V \frac{\vec{J}(M)}{\|MP\|} \cdot dv \quad \text{Équation 3-6}$$

Par ailleurs, l'induction magnétique  $\vec{B}$  au point  $P$  dérive du potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  :

$$\vec{B}(P) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \iiint_V \frac{\vec{J}(M) \wedge \vec{u}}{\|MP\|^2} \cdot dv \quad \text{Équation 3-7}$$

L'utilisation de matériaux magnétiques tels que les rails de roulement introduit une modification des lignes de champ magnétique du domaine. Considérer ainsi que l'environnement des conducteurs est amagnétique est une hypothèse simplificatrice utilisée par le logiciel IMAFEB.

Les résultats de la modélisation de la LAC par les éléments finis sont rappelés dans le Tableau 3-3 et sont comparés avec ceux obtenus par IMAFEB :

Fréquence [Hz]	Matrice inductance MEF [ $\mu\text{H/m}$ ]	Matrice inductance IMAFEB [ $\mu\text{H/m}$ ]
10	$L = \begin{pmatrix} 2,57 & 1,18 & 1,18 \\ 1,18 & 9,89 & 1,47 \\ 1,18 & 1,47 & 9,89 \end{pmatrix}$	$L = \begin{pmatrix} 2,52 & 1,18 & 1,18 \\ 1,18 & 2,15 & 1,45 \\ 1,18 & 1,45 & 2,15 \end{pmatrix}$
100	$L = \begin{pmatrix} 2,34 & 0,95 & 0,95 \\ 0,95 & 4,54 & 1,22 \\ 0,95 & 1,22 & 4,54 \end{pmatrix}$	$L = \begin{pmatrix} 2,30 & 0,95 & 0,95 \\ 0,95 & 1,92 & 1,22 \\ 0,95 & 1,22 & 1,92 \end{pmatrix}$
1k	$L = \begin{pmatrix} 2,09 & 0,72 & 0,72 \\ 0,72 & 2,13 & 0,98 \\ 0,72 & 0,98 & 2,13 \end{pmatrix}$	$L = \begin{pmatrix} 2,06 & 0,72 & 0,72 \\ 0,72 & 1,70 & 0,99 \\ 0,72 & 0,99 & 1,70 \end{pmatrix}$
10k	$L = \begin{pmatrix} 1,87 & 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & 1,43 & 0,78 \\ 0,50 & 0,78 & 1,43 \end{pmatrix}$	$L = \begin{pmatrix} 1,83 & 0,49 & 0,49 \\ 0,49 & 1,47 & 0,76 \\ 0,49 & 0,76 & 1,47 \end{pmatrix}$

Tableau 3-3 : Comparaisons des matrices inductance obtenues avec la MEF ou IMAFEB



Les résultats entre les deux approches sont très proches exceptés pour les inductances propres des rails de roulement (conducteurs 2 et 3) de 10 Hz à 1 kHz. Sur ces points particuliers, la méthode d'IMAFEB pour le calcul des inductances propres de conducteurs magnétiques est à prendre en défaut. Comme nous l'avons mentionné, le logiciel simplifie le problème en supposant que les lignes de champ du système ne sont pas modifiées par la présence de conducteurs magnétiques, ce qui est faux. Mis à part cette différence sur les inductances propres des conducteurs magnétiques, l'adéquation des résultats des deux méthodes (éléments finis et méthode de Carson) est rassurante quant à la modélisation du sol retenue pour les éléments finis.

### 3.1.2.3. Sensibilité des résultats aux paramètres du sol

De manière à illustrer les impacts des paramètres du sol sur les inductances du système *LAC*, nous choisissons de nous placer à une fréquence de 10 kHz, et de faire varier la résistivité de milieu en fixant sa perméabilité ( $\mu_{sol} = 1$  pour l'ensemble de l'étude). Il serait bien entendu possible de faire le même genre d'analyse avec une perméabilité variable. Dans cette étude, la géométrie du système doit être modifiée en regard de l'épaisseur de peau, puisque le rayon  $R_c$  du conducteur semi-cylindrique qui modélise le sol en est dépendant, cf. Équation 3-4. Le Tableau 3-4 et la Figure 3-10 présentent les variations des inductances du système *LAC* avec la résistivité du sol.

Résistivité $\rho_{sol}$ [ $\Omega.m$ ]	10	100	1000
Rayon $R_c$ [m]	60	200	600
Matrice inductance $L$ [ $\mu H/m$ ]	$L = \begin{pmatrix} 1,68 & 0,30 & 0,30 \\ 0,30 & 1,22 & 0,54 \\ 0,50 & 0,54 & 1,22 \end{pmatrix}$	$L = \begin{pmatrix} 1,87 & 0,50 & 0,50 \\ 0,50 & 1,43 & 0,78 \\ 0,50 & 0,78 & 1,43 \end{pmatrix}$	$L = \begin{pmatrix} 2,08 & 0,73 & 0,73 \\ 0,73 & 1,67 & 0,99 \\ 0,73 & 0,99 & 1,67 \end{pmatrix}$

Tableau 3-4 : Modification des matrices inductance avec la résistivité du sol ( $f = 10$  kHz)

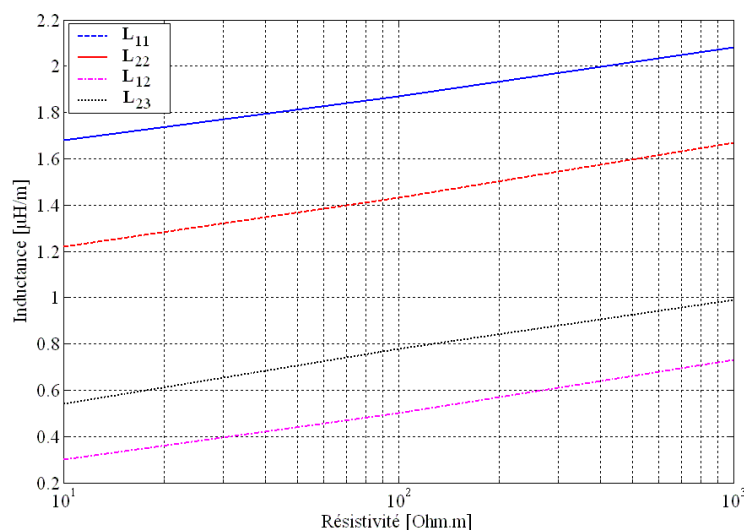


Figure 3-10 : Evolution des inductances du système *LAC* avec la résistivité du sol

A la vue des résultats, nous notons clairement qu'une augmentation de la résistivité du sol se traduit par un accroissement des inductances du système. Cela est logique car l'accroissement de la résistivité du sol augmente son épaisseur de peau, cf. Équation 3-4, et donc de ce fait le rayon du conducteur équivalent semi-cylindrique. La surface où circulent les courants dans le sol est accrue, augmentant ainsi les inductances propres des conducteurs du système. Dans le cas d'étude présenté, lorsque la résistivité du sol augmente d'une décade, les inductances se renforcent d'environ 10 %. Le sol et ses paramètres caractéristiques associés sont donc d'importance dans la détermination du caractère inductif d'un système. Ainsi, nous jugeons que pour des cas d'études plus spécifiques (sols humides ou très secs), des mesures de résistivité du sol - voire de perméabilité - doivent être réalisées, afin d'ajuster au mieux leur valeurs.

#### 3.1.2.4. Calcul de la matrice capacité

Comme pour le calcul de la matrice inductance du système, une matrice capacité, rassemblant les différentes capacités parasites entre les conducteurs, peut être établie. La technique utilisée pour la détermination de la matrice est différente de la méthode introduite par [CLAYTON-94]. En effet, l'Équation 3-8 liant les matrices inductance et capacité ne peut pas être utilisée car le milieu n'est pas homogène.

$$L = \mu_0 \cdot \varepsilon_0 \cdot C^{-1} \quad \text{Équation 3-8}$$

En nous basant sur des considérations énergétiques, nous pouvons envisager une autre approche. Le principe de la méthode consiste à imposer consécutivement un couple de densité de charge aux conducteurs du système. L'énergie globale du système, calculée sous FLUX2D, permet ensuite de déduire une capacité entre les deux conducteurs chargés, grâce à l'Équation 3-9.

$$E_{\text{globale}} = \frac{1}{2} \cdot C \cdot V^2 = \frac{Q^2}{2 \cdot C} \quad \text{Équation 3-9}$$

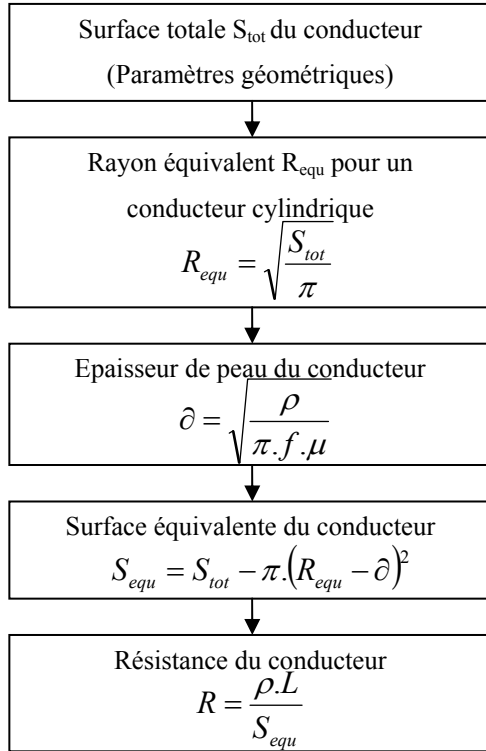
A titre d'exemple, le comportement électrostatique du système *LAC* peut être modélisé par la matrice capacité *C* :

$$C = \begin{pmatrix} 4,5 & 4,8 & 4,8 \\ 4,8 & 15,0 & 8,0 \\ 4,8 & 8,0 & 15,0 \end{pmatrix} \text{ pF/m}$$

Les termes les plus importants de la matrice sont les capacités parasites entre les rails de roulement et le sol.

### 3.1.2.5. Calcul de la matrice résistance

Au même titre que les matrices inductance et capacité, une matrice résistance peut être établie. Les différents conducteurs n'étant pas reliés physiquement les uns les autres, les matrices résistance sont des matrices diagonales. La détermination de chacune des résistances composant la diagonale de la matrice est réalisée en intégrant l'effet de peau. La démarche à suivre pour déterminer chacune des résistances du système est illustrée dans la Figure 3-11 :



Les paramètres géométriques d'un conducteur permettent de calculer sa surface totale. En prenant ensuite comme hypothèse que ce conducteur est cylindrique, il est possible d'en déduire un rayon équivalent. Le calcul de l'épaisseur de peau du conducteur permet enfin de déterminer sa surface équivalente (surface en forme de couronne où circulent les courants) et de calculer sa résistance.

Remarque : lorsque l'épaisseur de peau calculée est supérieure au rayon du conducteur cylindrique équivalent, cela signifie que les courants circulent sur la section totale du conducteur.

La Figure 3-12 montre par exemple la variation de résistance de la LAC ou d'un rail de roulement avec la fréquence.

Figure 3-11 : Principe du calcul de la matrice résistance

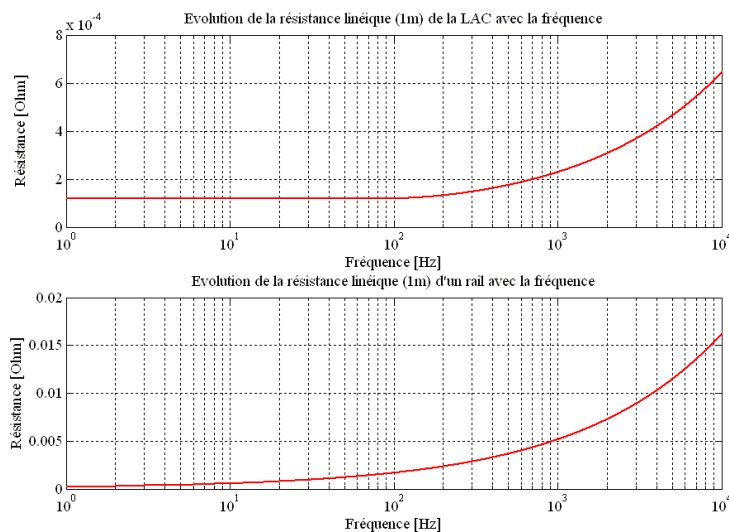


Figure 3-12 : Variation des résistances linéiques des conducteurs avec la fréquence

Comme nous le voyons sur la Figure 3-12, l'accroissement de la fréquence des courants d'excitation mène à une augmentation de la résistance des conducteurs. Bien entendu, ce phénomène est clairement connu : avec la fréquence, les courants sont rejetés à la périphérie des conducteurs. Les surfaces équivalentes des conducteurs sont donc réduites, renforçant de ce fait leur aspect résistif.

### 3.2. Alimentation Statique par le Sol (ALISS)

Le procédé d'alimentation par le sol d'ALSTOM (*ALISS*) est également un système de transmission à conducteurs multiples. Sa structure est certes plus complexe que celle d'une ligne aérienne de contact (*LAC*), mais la démarche de caractérisation est identique. Comme précédemment, la méthode des éléments finis sera couplée à la technique *MTL* (Multiconductor Transmission Line), et les matrices caractéristiques d'*ALISS* seront déterminées. Dans une dernière partie, quelques comparatifs entre la structure d'*ALISS* et celle d'une *LAC* seront effectués.

#### 3.2.1. Présentation et détail de la structure

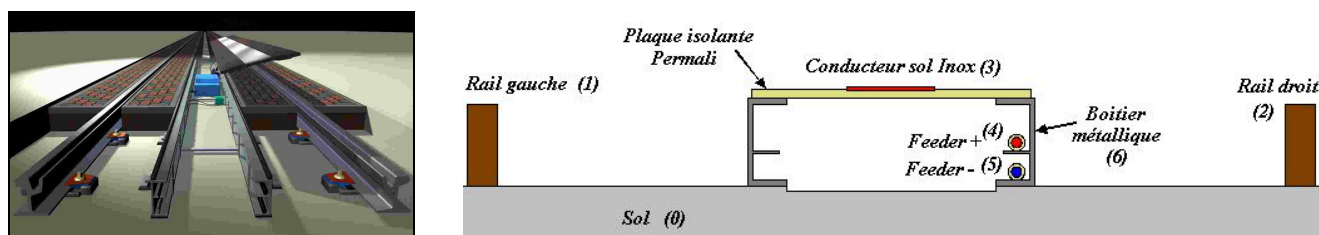


Figure 3-13 : Modélisation d'ALISS – Coupe transversale

Une coupe transversale d'*ALISS* (Figure 3-13) permet de distinguer les conducteurs suivants :

Numéro	Référence	Matériau	Section [mm <sup>2</sup> ]	Résistivité [ $\Omega m$ ]	Perméabilité relative [-]
0	Sol	Terre	Variable	100	1
1	Rail gauche	Fer	7000	$222 \cdot 10^{-8}$	350
2	Rail droit	Fer	7000	$222 \cdot 10^{-8}$	350
3	Plaque sol	Inox	900	$500 \cdot 10^{-8}$	200
4	Feeder positif	Cuivre	240	$1,785 \cdot 10^{-8}$	1
5	Feeder négatif	Cuivre	240	$1,785 \cdot 10^{-8}$	1
6	Châssis métallique	Fer	5100	$222 \cdot 10^{-8}$	750

Tableau 3-5 : ALISS - Caractéristiques des matériaux utilisés

La structure d'*ALISS* intègre dans un espace restreint de nombreux conducteurs magnétiques (rails de roulement, plaque sol en inox, et boîtier métallique). La méthode des éléments finis se justifie une nouvelle fois devant toutes ses concurrentes [MORIN-03b].

### 3.2.2. Matrices caractéristiques

L'alimentation par le sol étudiée compte sept conducteurs, dont le sol fait partie intégrante. En considérant le sol comme conducteur de référence, les matrices inductance et capacité caractéristiques de la structure sont des matrices symétriques de taille 6x6. La numérotation des conducteurs est donnée dans le Tableau 3-5.

#### 3.2.2.1. Matrices inductances

Comme précédemment, pour déterminer les matrices inductances d'ALISS, le sol a été assimilé à un conducteur semi-cylindrique, dont le rayon est dépendant de la fréquence d'excitation du système, cf.

3.1.2.1. Différentes matrices inductances peuvent ainsi être établies :

$$\begin{aligned}
 f = 10 \text{ Hz} \quad L &= \begin{pmatrix} 9,99 & 1,45 & 1,59 & 1,56 & 1,56 & 1,60 \\ 1,45 & 9,99 & 1,59 & 1,62 & 1,63 & 1,60 \\ 1,59 & 1,50 & 3,02 & 1,93 & 1,90 & 1,85 \\ 1,56 & 1,62 & 1,93 & 3,42 & 2,42 & 2,06 \\ 1,56 & 1,63 & 1,90 & 2,42 & 3,71 & 2,09 \\ 1,60 & 1,60 & 1,85 & 2,06 & 2,09 & 3,13 \end{pmatrix} \mu\text{H/m}, & f = 100 \text{ Hz} \quad L &= \begin{pmatrix} 4,64 & 1,23 & 1,37 & 1,34 & 1,34 & 1,38 \\ 1,23 & 4,64 & 1,37 & 1,39 & 1,40 & 1,38 \\ 1,37 & 1,37 & 2,79 & 1,70 & 1,63 & 1,63 \\ 1,34 & 1,39 & 1,70 & 3,13 & 2,15 & 1,85 \\ 1,34 & 1,40 & 1,63 & 2,15 & 3,39 & 1,87 \\ 1,38 & 1,38 & 1,63 & 1,85 & 1,87 & 2,72 \end{pmatrix} \mu\text{H/m} \\
 f = 1 \text{ kHz} \quad L &= \begin{pmatrix} 2,01 & 1,00 & 1,14 & 1,12 & 1,12 & 1,15 \\ 1,00 & 2,01 & 1,14 & 1,16 & 1,17 & 1,15 \\ 1,14 & 1,14 & 2,53 & 1,45 & 1,41 & 1,38 \\ 1,12 & 1,16 & 1,45 & 2,61 & 1,72 & 1,55 \\ 1,12 & 1,17 & 1,41 & 1,72 & 2,77 & 1,57 \\ 1,15 & 1,15 & 1,38 & 1,55 & 1,57 & 1,64 \end{pmatrix} \mu\text{H/m}, & f = 10 \text{ kHz} \quad L &= \begin{pmatrix} 1,44 & 0,79 & 0,91 & 0,92 & 0,92 & 0,92 \\ 0,79 & 1,44 & 0,91 & 0,92 & 0,92 & 0,92 \\ 0,91 & 0,91 & 1,68 & 1,13 & 1,12 & 1,12 \\ 0,92 & 0,92 & 1,13 & 1,63 & 1,12 & 1,12 \\ 0,92 & 0,92 & 1,12 & 1,12 & 1,53 & 1,21 \\ 0,92 & 0,92 & 1,12 & 1,12 & 1,21 & 1,21 \end{pmatrix} \mu\text{H/m}
 \end{aligned}$$

Les termes les plus sensibles des matrices sont les inductances propres des rails de roulement ( $L_{11}$  et  $L_{22}$ ). L'évolution des inductances propres d'ALISS avec la fréquence est illustrée avec la Figure 3-14. Comme  $L_{11}$  et  $L_{22}$  sont identiques, la figure suivante ne présentera que  $L_{11}$ .

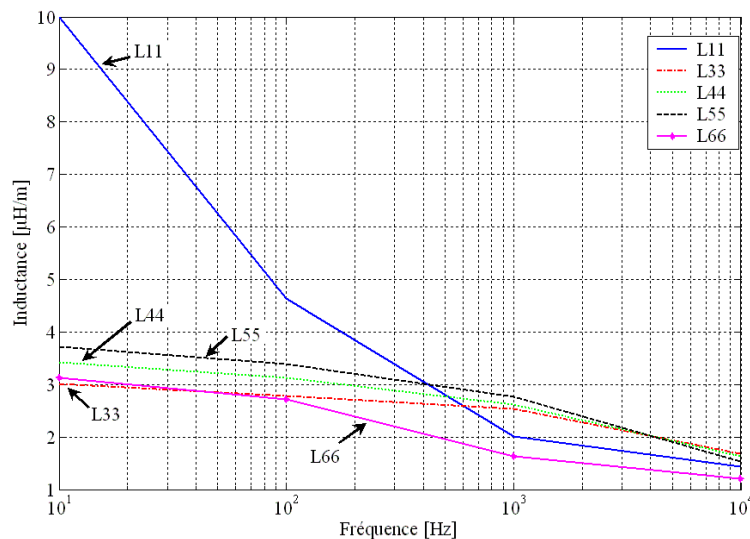


Figure 3-14 : Variation des inductances propres d'ALISS avec la fréquence

### 3.2.2.2. Matrice capacité

Pour établir la matrice capacité  $C$ , une permittivité relative de 4 [MENGUY-97] sera retenue pour caractériser les isolants des câbles et de la plaque de surface Permali. La matrice  $C$  est donnée ci-dessous :

$$C = \begin{pmatrix} 15,0 & 8,0 & 10,8 & 8,0 & 8,0 & 14,5 \\ 8,0 & 15,0 & 10,8 & 9,2 & 9,2 & 14,5 \\ 10,8 & 10,8 & 18,5 & 12,2 & 12,2 & 28,4 \\ 8,0 & 9,2 & 12,2 & 8,0 & 21,4 & 21,4 \\ 8,0 & 9,2 & 12,2 & 21,4 & 8,0 & 21,0 \\ 14,5 & 14,5 & 28,4 & 21,4 & 21,0 & 25,0 \end{pmatrix} \text{ pF/m}$$

Cette matrice capacité correspond aux capacités parasites entre les conducteurs d'ALISS pour une longueur de 1 m. Les termes les plus importants correspondent aux couplages électrostatiques entre les conducteurs situés à l'intérieur du boîtier ALISS.

Notons par exemple la valeur de 28 pF/m pour la capacité parasite linéique entre la plaque en inox et le boîtier métallique. Les secteurs ALISS sont espacés les uns des autres d'une distance de 5 m. La capacité parasite entre la plaque en inox et le boîtier métallique à considérer pour cette longueur est de 140 pF. Néanmoins, comme nous le verrons dans le cadre des études temporelles, le schéma de puissance de l'alimentation par le sol intègre des capacités additionnelles connectées en parallèle entre certains conducteurs. Devant leur valeur (de l'ordre du  $\mu\text{F}$ ), de nombreuses capacités parasites seront ainsi négligées.

### 3.2.3. Comparaisons LAC / ALISS

Les deux structures d'alimentation précédemment étudiées peuvent être comparées en terme de comportement inductif. Pour ce faire, nous prendrons l'exemple d'une boucle composée du feeder positif (ou de la ligne aérienne de contact) et du rail de roulement gauche. L'évolution des inductances en fonction de la fréquence est présentée Figure 3-15.

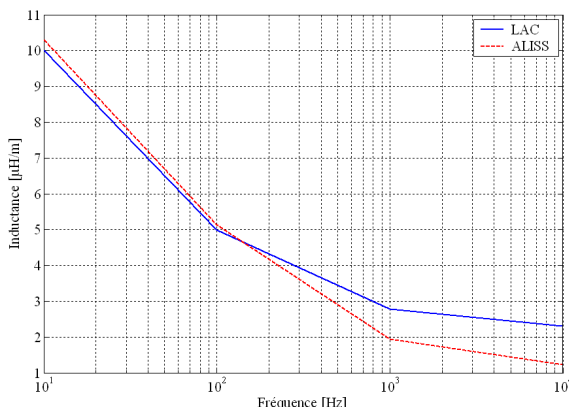


Figure 3-15 : Evolution des inductances Feeder positif / Rail avec la fréquence, sur les structures LAC et ALISS

Les comportements inductifs sont relativement semblables car les inductances propres des rails de roulement sont importantes par rapport aux autres termes des matrices, et quasi identiques entre les structures LAC et ALISS. Les différences structurelles, telles que la proximité du boîtier métallique des conducteurs, semblent ainsi être de moindre importance, surtout pour des fréquences inférieures à 100 Hz. De plus amples remarques pourront être réalisées lors des études dynamiques des deux systèmes (chapitre 4).

### 3.3. Modélisation des transformateurs de sous-station

Dans le monde des tramways et des métros, les transformateurs de sous-station assurent le raccordement des ponts redresseurs triphasés (associés éventuellement en série ou en parallèle) au réseau alternatif amont. La modélisation des transformateurs est importante pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les différents bobinages (au primaire et au secondaire) qui les composent peuvent être légèrement déséquilibrés. Sur un réseau de tramway ou de métro, la signature harmonique d'un tel défaut montre l'apparition de raies à des multiples pairs du fondamental sur les courants et tensions DC [SABATE-02]. Ensuite, les couplages des transformateurs (triangle, étoile, zig-zag) apportent des propriétés harmoniques particulières aux systèmes électriques. Pour ces deux principales raisons citées (déséquilibre des enroulements et couplage), il est nécessaire de modéliser les transformateurs utilisés dans les sous-stations.

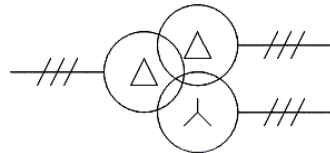
Les transformateurs que l'on trouve en pratique sur les réseaux d'alimentation électrique de tramway ou de métro assurent la transformation de tension entre les niveaux *HTA* et *BTB* [MORIN-03c]. Parmi les plus utilisés, nous pouvons noter les transformateurs triphasés traditionnels  $Dy_n$ , ou les transformateurs équipés de deux secondaires triphasés  $Ddy_n$  :



**Transformateur  $Dy_n$  de la sous-station de la ligne de la Rochelle**

20 kV / 590 V – 50 Hz

$S = 1$  MVA,  $U_{cc} = 7 \%$



**Transformateur  $Ddy_n$  du groupe TR1 de Valenciennes**

20 kV / 2x590 V – 50 Hz

$S = 5,3$  MVA,  $U_{cc} = 6 \%$

Figure 3-16 : Schémas de quelques transformateurs usuels

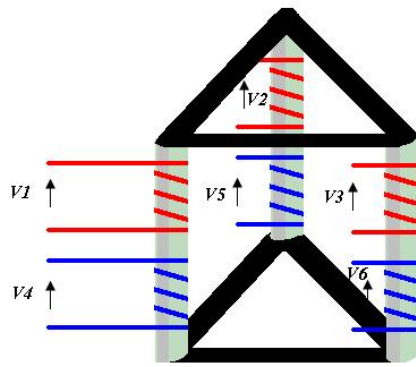
Dans ce paragraphe, nous tâcherons de modéliser les deux transformateurs usuellement rencontrés dans les sous-stations de traction : le transformateur  $Dy_n$  et le transformateur  $Ddy_n$  présentés Figure 3-16. Une démarche globale sera mise en avant et les effets des couplages seront analysés. Pour aller plus loin nous nous attacherons dans l'Annexe III à la présentation d'une méthode de mesure des paramètres caractéristiques d'un transformateur. Les effets de la saturation des circuits magnétiques et leur modélisation harmonique associée ne seront pas étudiés dans cette thèse, bien que le sujet ait déjà été traité dans la communauté scientifique [HUANG-03] [PEDRA-04]. L'absence des phénomènes de saturation va bien entendu fausser les spectres des signaux calculés, puisque l'hypothèse de linéarité est invalidée. Les allures des courants et des tensions aux bornes des bobines du transformateur sont modifiées, se répercutant bien évidemment sur leur signature spectrale. En tout état de cause, les travaux que nous allons effectuer vont nous permettre d'avoir une première idée simplifiée des effets des couplages sur les transformateurs utilisés.

### 3.3.1. Matrices primitives

Deux niveaux d'observation peuvent être apportés pour analyser un transformateur :

- l'observation structurelle ;
- l'observation globale.

L'observation structurelle d'un transformateur consiste à se placer à l'intérieur du composant. Chaque bobinage peut être décrit par une équation liant la tension à ses bornes aux courants circulants dans l'ensemble des conducteurs couplés magnétiquement (une matrice dite primitive peut ainsi être établie). L'observation globale d'un transformateur est une vision externe du composant. Seuls les tensions (simples ou composées) et les courants de ligne sont disponibles pour caractériser son fonctionnement. Comme nous allons l'étudier, pour chaque transformateur, plusieurs matrices caractéristiques peuvent être établies en fonction des inconnues du système. Il est important de noter que les deux niveaux d'observation sont en fait complémentaires pour modéliser le transformateur.



Une matrice primitive est une matrice inductance du transformateur, liant les tensions et les courants aux bornes de chaque bobinage. Pour les calculs théoriques de ce paragraphe, nous prendrons comme hypothèse que les transformateurs triphasés étudiés sont parfaitement équilibrés, et qu'ils présentent une symétrie d'ordre 3 (les colonnes du transformateurs s'inscrivent ainsi sur les arêtes d'une base de triangle équilatéral).

Figure 3-17 : Transformateur 3 colonnes, symétrie d'ordre 3

La matrice inductance primitive associée s'écrit selon l'Équation 3-10 :

$$[Z_{\text{Primitive}}] = \begin{bmatrix} Z_p & a & a & Z_m & b & b \\ a & Z_p & a & b & Z_m & b \\ a & a & Z_p & b & b & Z_m \\ Z_m & b & b & Z_s & c & c \\ b & Z_m & b & c & Z_s & c \\ b & b & Z_m & c & c & Z_s \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-10}$$

avec :

- $Z_p$  : Inductance propre des enroulements primaires (1, 2 et 3)
- $Z_s$  : Inductance propre des enroulements secondaires (4, 5 et 6)
- $Z_m$  : Mutuelle entre les enroulements primaires et secondaires bobinés sur la même colonne
- $a$  : Mutuelle entre les enroulements primaires
- $b$  : Mutuelle entre les enroulements primaires et secondaires bobinés sur des colonnes différentes
- $c$  : Mutuelle entre les enroulements secondaires



La matrice inductance  $\mathbf{Z}_{\text{Primitive}}$  lie donc les tensions aux bornes des enroulements, aux courants qui les traversent :

$$[V_i] = [Z_{\text{Primitive}}] \cdot [I_i] \quad \text{Équation 3-11}$$

Les sections suivantes présenteront les structures  $Dyn$ , et  $Ddyn$  de transformateurs. Les détails des calculs matriciels seront donnés dans l'Annexe II.

### 3.3.2. Transformateur $Dyn$

Ce type de couplage des enroulements d'un transformateur est très répandu car il offre des propriétés intéressantes, notamment en cas de déséquilibre sur les réseaux. Le cas d'un déséquilibre sur une des lignes du secondaire n'induit pas de chute de tension sur les autres lignes. Au niveau du primaire du transformateur, la séquence de courant homopolaire restera piégée dans le triangle, et le déséquilibre du secondaire se traduira par l'apparition d'une séquence de courant inverse au primaire. La Figure 3-18 présente la structure générique d'un couplage  $Dyn$  d'un transformateur.

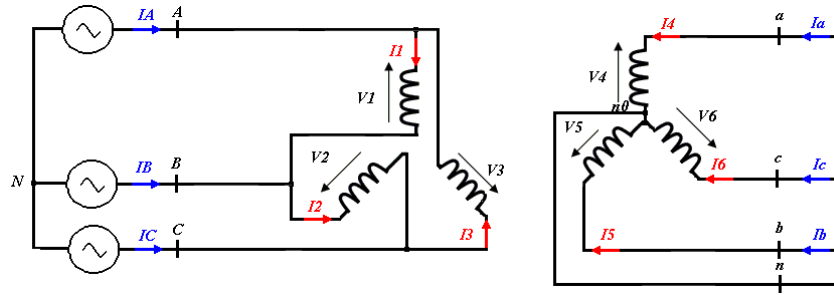


Figure 3-18 : Couplage  $Dyn$  d'un transformateur

Un lien entre les tensions et courants des bobines du transformateur et les tensions et courants de lignes du transformateur peut être établi :

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_H \\ I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \vdots & & \vdots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} \quad \text{soit } [I_{TR}] = [C_i] \cdot [I_i] \quad \text{Équation 3-12}$$

$I_H$  est le courant homopolaire circulant dans le triangle du transformateur. Le choix d'ajouter  $I_H$  dans l'Équation 3-12 vient du fait qu'une combinaison linéaire existe entre les courants  $I_A$ ,  $I_B$  et  $I_C$ . Comme nous le verrons par la suite, il peut être utile d'inverser la matrice  $C_i$  en fonction des inconnues du système. Or, la somme des trois courants de ligne étant nulle (loi des nœuds en  $N$ ), la matrice

$\mathbf{M}$  liant ainsi les courants de lignes primaires avec les courants des bobinages du transformateur n'est pas inversible, cf. Équation 3-13 :

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} \quad \text{Soit } [I_{\text{ligne}}] = [M] \cdot [I_{\text{bobine}}] \quad \text{Équation 3-13}$$

De la même manière, nous pouvons établir une matrice  $\mathbf{D}_i$  liant les tensions de lignes aux tensions aux bornes des bobines du transformateur :

$$\begin{bmatrix} U_{AB} \\ U_{BC} \\ U_{CA} \\ V_{an} \\ V_{bn} \\ V_{cn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix} \quad \text{soit } [V_{TR}] = [D_i] \cdot [V_i] \quad \text{Équation 3-14}$$

Nous notons dans l'Équation 3-14 l'usage des tensions composées pour les tensions de lignes du transformateur. Dans le cas de l'utilisation des tensions simples, la matrice liant les tensions des bobinages à celles des lignes n'est pas inversible.

Nous avons donc :

$$[V_{TR}] = [D_i] \cdot [Z_{\text{Primitive}}] \cdot [C_i]^{-1} \cdot [I_{TR}] \quad \text{Équation 3-15}$$

La matrice liant les tensions et les courants du transformateur  $Dy_n$  est  $\mathbf{Z}_{Dy_n}$  :

$$[Z_{Dy_n}] = [D_i] \cdot [Z_{\text{Primitive}}] \cdot [C_i]^{-1} \quad \text{Équation 3-16}$$

D'où :

$$[Z_{Dy_n}] = \begin{bmatrix} \frac{Zp}{3} - \frac{a}{3} & -\frac{Zp}{3} + \frac{a}{3} & Zp + 2a & Zm & b & b \\ \frac{Zp}{3} - \frac{a}{3} & -\frac{2a}{3} + \frac{2Zp}{3} & Zp + 2a & b & Zm & b \\ \frac{2a}{3} - \frac{2Zp}{3} & -\frac{Zp}{3} + \frac{a}{3} & Zp + 2a & b & b & Zm \\ \frac{Zm}{3} - \frac{b}{3} & -\frac{Zm}{3} + \frac{b}{3} & Zm + 2b & Zs & c & c \\ \frac{Zm}{3} - \frac{b}{3} & -\frac{2b}{3} + \frac{2Zm}{3} & Zm + 2b & c & Zs & c \\ \frac{2b}{3} - \frac{2Zm}{3} & -\frac{Zm}{3} + \frac{b}{3} & Zm + 2b & c & c & Zs \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-17}$$

$\mathbf{Z}_{Dy_n}$  peut être divisée en quatre matrices élémentaires  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  et  $[D]$  telles que :

$$\begin{bmatrix} V_p \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_p \\ I_s \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-18}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_H \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{AB} \\ U_{BC} \\ U_{CA} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{an} \\ V_{bn} \\ V_{cn} \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-19}$$

Divers arrangements matriciels peuvent être établis à partir de l'Équation 3-18 car les matrices élémentaires  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  et  $[D]$  sont toutes inversibles. Ainsi, en fonction des grandeurs connues du système, il est possible d'écrire l'Équation 3-18 de plusieurs manières différentes :

$$\begin{bmatrix} I_p \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^{-1}.B & A^{-1} \\ D - C.A^{-1}.B & C.A^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_s \\ V_p \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-20}$$

$$\begin{bmatrix} I_s \\ V_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D^{-1}.C & D^{-1} \\ A - B.D^{-1}.C & B.D^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_p \\ V_s \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-21}$$

$$\begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D.B^{-1} & C - D.B^{-1}.A \\ B^{-1} & -B^{-1}.A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_p \\ I_p \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-22}$$

$$\begin{bmatrix} V_p \\ I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A.C^{-1} & B - A.C^{-1}.D \\ C^{-1} & -C^{-1}.D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_s \\ I_s \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-23}$$

Dans le cas où les tensions primaires et les courants secondaires sont connus, l'Équation 3-20 sera utilisée. Les détails des calculs sont donnés dans l'Annexe II. Afin de vérifier qu'une séquence de courants homopolaires au secondaire du transformateur  $Dy_n$  n'est pas répercutée au primaire, prenons comme hypothèse que les tensions primaires et les courants secondaires sont :

$$\begin{bmatrix} V_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{p\_eff} \cdot e^{j\omega t} \\ U_{p\_eff} \cdot e^{j(\omega t - 2\pi/3)} \\ U_{p\_eff} \cdot e^{j(\omega t - 4\pi/3)} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{h\_eff} \cdot e^{3j\omega t} \\ I_{h\_eff} \cdot e^{3j\omega t} \\ I_{h\_eff} \cdot e^{3j\omega t} \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-24}$$

Mathématiquement, en reprenant l'Équation 3-20 et en développant les expressions, nous pouvons écrire :

$$I_A = \frac{U_{p\_eff} \cdot \sqrt{3}}{a - Zp} \cdot e^{j(\omega t + \frac{5\pi}{6})} \quad \text{et} \quad I_B = \frac{U_{p\_eff} \cdot \sqrt{3}}{a - Zp} \cdot e^{j(\omega t + \frac{\pi}{6})} \quad \text{Équation 3-25}$$

$I_A + I_B + I_C = 0$ , donc  $I_A$ ,  $I_B$  et  $I_C$  constituent un système direct, à la fréquence des tensions de lignes primaires. Ces courants de lignes sont indépendants des courants homopolaires du secondaire. Les

termes dus à la séquence homopolaire se simplifient grâce à l'Équation II-5 de l'Annexe II. Par ailleurs, le courant homopolaire du triangle s'écrit :

$$I_H = \frac{-I_{h\_eff} \cdot (Z_m + 2b)}{Z_p + 2a} \cdot e^{3j\omega t} \quad \text{Équation 3-26}$$

Ce courant homopolaire circule dans le triangle du transformateur, et est issu directement du courant de chacune des lignes du secondaire  $I_{h\_eff} \cdot e^{3j\omega t}$ .

### 3.3.3. Transformateur $Ddy_n$

Le transformateur  $Ddy_n$  est un transformateur doté de deux secondaires identiques. Afin de prendre en compte les couplages entre les deux secondaires ( $S_1$  et  $S_2$ ), il est nécessaire de raisonner sur des matrices inductances de taille 9x9, liant ainsi chaque enroulement du transformateur aux huit autres. La Figure 3-19 présente la structure du transformateur  $Ddy_n$ .

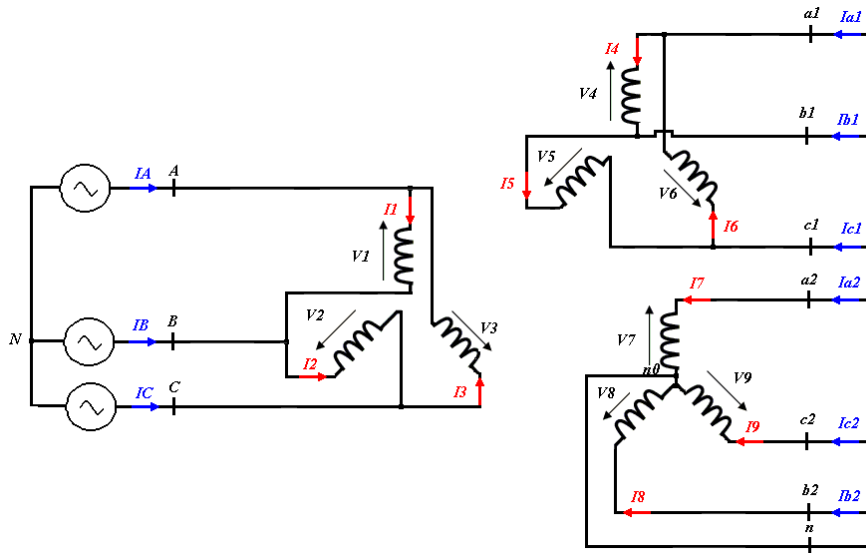


Figure 3-19 : Couplage  $Ddy_n$  d'un transformateur

#### 3.3.3.1. Matrice primitive du transformateur $Ddy_n$

La matrice inductance primitive du transformateur  $Ddy_n$  correspond à la matrice inductance d'un transformateur  $Y_n Y_n Y_n$  puisque les courants circulant dans les enroulements d'un transformateur  $Y_n Y_n Y_n$  sont les courants de lignes, et que les tensions aux bornes des enroulements sont les tensions simples :

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \\ I_{a1} \\ I_{b1} \\ I_{c1} \\ I_{a2} \\ I_{b2} \\ I_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & & & \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & & & \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 & \ddots & \\ \vdots & & & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit } [I_{TR}] = [C_i] \cdot [I_i] \quad \text{Équation 3-27}$$

$$\begin{bmatrix} V_{AN} \\ V_{BN} \\ V_{CN} \\ V_{a1n} \\ V_{b1n} \\ V_{c1n} \\ V_{a2n} \\ V_{b2n} \\ V_{c2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & & & \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & & & \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & \ddots & & \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 & \ddots & \\ \vdots & & & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Soit } [V_{TR}] = [D_i] \cdot [V_i] \quad \text{Équation 3-28}$$

L'équation liant les tensions simples et les courants du transformateur  $Y_n y_n y_n$  est :

$$[V_{TR}] = [D_i] \cdot [Z_{Primitive}] \cdot [C_i]^{-1} \cdot [I_{TR}] \quad \text{Équation 3-29}$$

La matrice du transformateur  $Y_n y_n y_n$  est égale à sa matrice primitive :

$$[Z_{Ynyn}] = [D_i] \cdot [Z_{Primitive}] \cdot [C_i]^{-1} = [Z_{Primitive}] \quad \text{Équation 3-30}$$

Ainsi, on a :

$$[Z_{Primitive}] = [Z_{Ynynyn}] = \begin{bmatrix} Zp & a & a & Zm & b & b & Zm & b & b \\ a & Zp & a & b & Zm & b & b & Zm & b \\ a & a & Zp & b & b & Zm & b & b & Zm \\ Zm & b & b & Zs & c & c & Zn & d & d \\ b & Zm & b & c & Zs & c & d & Zn & d \\ b & b & Zm & c & c & Zs & d & d & Zn \\ Zm & b & b & Zn & d & d & Zs & e & e \\ b & Zm & b & d & Zn & d & e & Zs & e \\ b & b & Zm & d & d & Zn & e & e & Zs \end{bmatrix} \quad \text{Équation 3-31}$$

Avec :

$Zp$  : Inductance propre des enroulements primaires (1,2 et 3)

$Zs$  : Inductance propre des enroulements secondaires  $S_1$  et  $S_2$  (4, 5, 6, 7, 8 et 9)

$Zm$  : Mutuelle entre les enroulements primaires et secondaires ( $S_1$  et  $S_2$ ) bobinés sur la même colonne

$Zn$  : Mutuelle entre les enroulements secondaires  $S_1$  et  $S_2$  bobinés sur la même colonne.

- $a$  : Mutuelle entre les enroulements primaires  
 $b$  : Mutuelle entre les enroulements primaires et secondaires ( $S_1$  et  $S_2$ ) bobinés sur des colonnes différentes  
 $c$  : Mutuelle entre les enroulements du secondaire  $S_1$   
 $d$  : Mutuelle entre les enroulements du secondaire  $S_2$   
 $e$  : Mutuelle entre les enroulements du secondaire  $S_1$  et  $S_2$

### 3.3.3.2. Matrice caractéristique du transformateur $Ddy_n$

Les matrices  $C_i$  et  $D_i$  liant les courants et tensions de ligne aux courants et tensions des bobines ont été choisies car elles sont inversibles. Ainsi, pour les couplages en triangle du transformateur, le courant homopolaire est retenu ainsi que les tensions composées. Pour le couplage en étoile, les tensions représentatives choisies sont les tensions simples :

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_H \\ I_{a1} \\ I_{b1} \\ I_{h1} \\ I_{a2} \\ I_{b2} \\ I_{c2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & & & & & & \\ -1 & 1 & 0 & & & & & & \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & & & & & & \\ & & & 1 & 0 & -1 & & & \\ & (0) & & -1 & 1 & 0 & & (0) & \\ & & & 1/3 & 1/3 & 1/3 & & & \\ & & & & & & 1 & 0 & 0 \\ & (0) & & & & & 0 & 1 & 0 \\ & & & & & & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \\ I_7 \\ I_8 \\ I_9 \end{bmatrix} \quad \text{Soit } [I_{TR}] = [C_i] \cdot [I_i] \quad \text{Équation 3-32}$$

$$\begin{bmatrix} U_{AB} \\ U_{BC} \\ U_{CA} \\ U_{a1b1} \\ U_{b1c1} \\ U_{c1a1} \\ V_{a2n} \\ V_{b2n} \\ V_{c2n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \\ V_7 \\ V_8 \\ V_9 \end{bmatrix} \quad \text{Soit } [V_{TR}] = [D_i] \cdot [V_i] \quad \text{Équation 3-33}$$

La matrice liant les tensions et les courants du transformateur  $Ddy_n$  est  $Z_{Ddyn}$  :

$$[Z_{Ddyn}] = [D_i] \cdot [Z_{Ynynyn}] \cdot [C_i]^{-1} \quad \text{Équation 3-34}$$

La matrice  $Z_{Ddyn}$  s'écrit telle que :

$$[Z_{Ddyn}] = \begin{bmatrix} \frac{Z_p}{3} - \frac{a}{3}, -\frac{Z_p}{3} + \frac{a}{3}, Z_p + 2a, \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3}, -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3}, Z_m + 2b, Z_m, b, b \\ \frac{Z_p}{3} - \frac{a}{3}, -\frac{2a}{3} + \frac{2Z_p}{3}, Z_p + 2a, \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3}, -\frac{2b}{3} + \frac{2Z_m}{3}, Z_m + 2b, b, Z_m, b \\ \frac{2a}{3} - \frac{2Z_p}{3}, -\frac{Z_p}{3} + \frac{a}{3}, Z_p + 2a, \frac{2b}{3} - \frac{2Z_m}{3}, -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3}, Z_m + 2b, b, b, Z_m \\ \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3}, -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3}, Z_m + 2b, \frac{Z_s}{3} - \frac{c}{3}, -\frac{Z_s}{3} + \frac{c}{3}, Z_s + 2c, Z_n, d, d \\ \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3}, -\frac{2b}{3} + \frac{2Z_m}{3}, Z_m + 2b, \frac{Z_s}{3} - \frac{c}{3}, -\frac{2c}{3} + \frac{2Z_s}{3}, Z_s + 2c, d, Z_n, d \\ \frac{2b}{3} - \frac{2Z_m}{3}, -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3}, Z_m + 2b, \frac{2c}{3} - \frac{2Z_s}{3}, -\frac{Z_s}{3} + \frac{c}{3}, Z_s + 2c, d, d, Z_n \\ \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3}, -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3}, Z_m + 2b, \frac{Z_n}{3} - \frac{d}{3}, -\frac{Z_n}{3} + \frac{d}{3}, Z_n + 2d, Z_s, e, e \\ \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3}, -\frac{2b}{3} + \frac{2Z_m}{3}, Z_m + 2b, \frac{Z_n}{3} - \frac{d}{3}, -\frac{2d}{3} + \frac{2Z_n}{3}, Z_n + 2d, e, Z_s, e \\ \frac{2b}{3} - \frac{2Z_m}{3}, -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3}, Z_m + 2b, \frac{2d}{3} - \frac{2Z_n}{3}, -\frac{Z_n}{3} + \frac{d}{3}, Z_n + 2d, e, e, Z_s \end{bmatrix}$$

Équation 3-35

De la même manière que précédemment, cette matrice caractéristique du transformateur peut être subdivisée en matrices élémentaires, permettant ainsi de réécrire le système en fonction des grandeurs connues, cf. Annexe II.

### 3.3.4. Applications

Grâce aux matrices équivalentes déterminées pour chaque transformateur, les courants et les tensions de ligne du primaire et du secondaire sont liés. La Figure 3-20 présente un exemple d'application de la modélisation d'un transformateur  $Ddy_n$ .

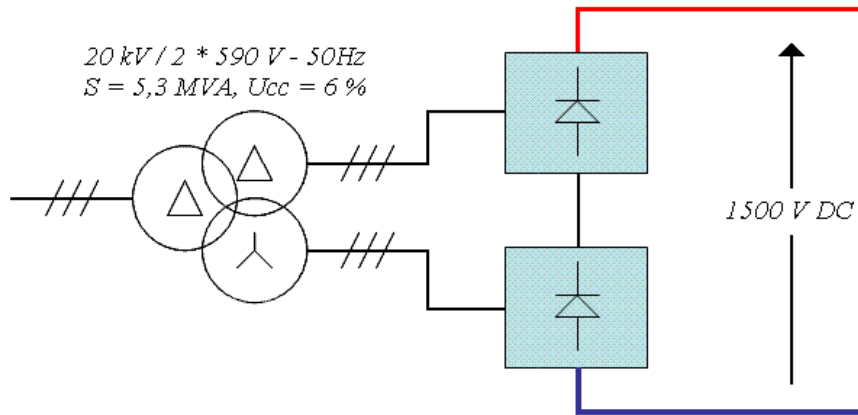


Figure 3-20 : Association série de deux ponts redresseurs, site de Valenciennes

Dans le cadre de la caractérisation du comportement harmonique d'un réseau de métro, alimenté en 1500 V DC, la sous-station du site expérimental de Valenciennes peut être configurée comme présentée Figure 3-20. Les deux ponts redresseurs sont associés en série, de manière à générer une tension de sortie de 1500 V DC. Nous reviendrons bien entendu sur ces aspects lors du chapitre 5, dédié aux analyses harmoniques, mais nous pouvons comprendre ici que la modélisation effectuée sur le transformateur va nous permettre de prendre en compte le couplage entre les deux secondaires du

transformateur. Les éventuels déséquilibres entre bobinages du transformateur vont pouvoir être étudiés en termes de conséquences harmoniques sur le réseau.

### **3.4. Points clefs sur les structures passives modélisées**

Les études sur les systèmes de transmission (Ligne Aérienne de Contact, Alimentation Par le Sol) et sur les transformateurs ont été motivées pour répondre à des besoins système. En ce sens, des méthodes de modélisation de ces composants ont été choisies afin d'apporter un niveau suffisant de pertinence dans la validité des schémas équivalents. Les systèmes de transmission ont ainsi été décrits avec leur environnement. Pour ce faire, le sol et les matériaux magnétiques ont été pris en compte grâce à un mariage entre la méthode des éléments finis et la technique *MTL* (Multiconductor Transmission Line). Les interactions électromagnétiques entre les différents conducteurs des systèmes de transmission sont ainsi précisément décrites. Les structures de transformateurs ont été modélisées via des matrices inductances primitives. Les couplages de ces transformateurs ont ensuite été intégrés grâce à des opérations matricielles. Ici aussi, les interactions électromagnétiques entre les enroulements des transformateurs sont prises en compte.

La modélisation des éléments passifs des réseaux d'alimentation électrique de tramway va maintenant nous permettre de procéder à leurs analyses comportementales dynamique et harmonique.



## *Chapitre 4*

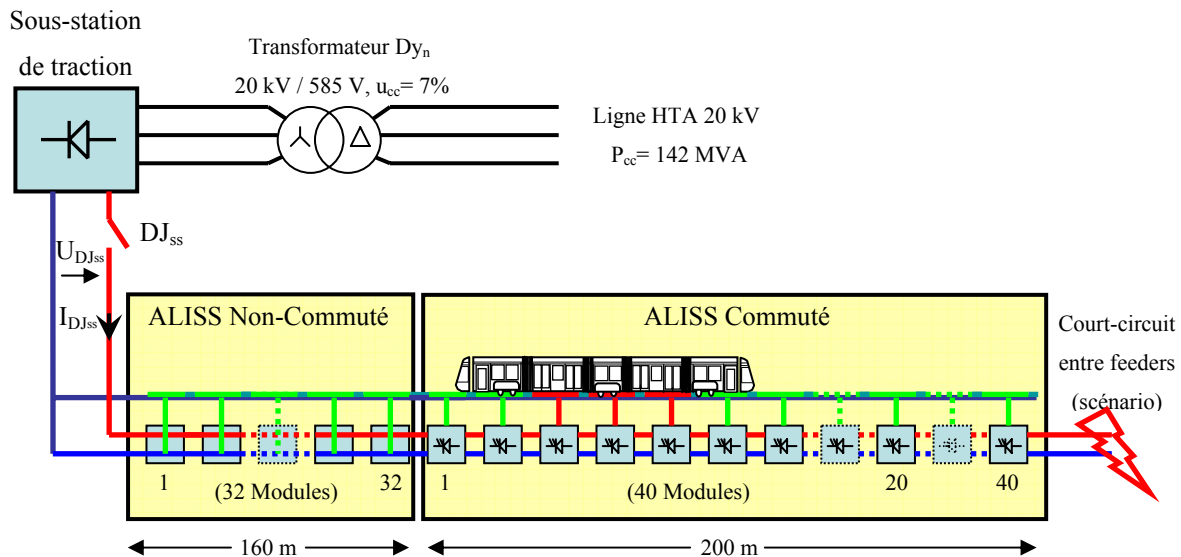
## *Table des matières du chapitre 4 :*

4.1. Transition dynamique entre secteurs conducteurs.....	84
4.1.1. Analyse du scénario.....	84
4.1.2. Modélisation du contact électrique.....	86
4.1.3. Etude de la transition .....	90
4.2. Comportement dynamique du réseau de La Rochelle .....	93
4.2.1. Schéma électrique équivalent de la ligne .....	94
4.2.2. Simulations .....	98
4.3. Bilan des analyses dynamiques .....	105

## **Chapitre 4 : Vers une analyse dynamique des réseaux d'alimentation électrique**

Les composants des réseaux d'alimentation électrique des tramways ayant été modélisés précisément, il est possible d'étudier le comportement dynamique de diverses lignes de tramway. A titre d'exemple, la ligne d'expérimentation de la Rochelle sera analysée. Cette ligne aurait dû être le siège de tests pour le projet d'alimentation par le sol *ALISS*. La modélisation et la simulation de ce réseau aurait ainsi permis de prédire le comportement de la ligne de tramway lors de régimes de fonctionnement normaux ou dégradés [MORIN-02].

La Figure 4-1 présente le schéma global retenu pour les simulations de la Rochelle.



*Figure 4-1 : Schéma de référence pour l'ensemble des simulations dynamiques sur la ligne de la Rochelle*

La dénomination *ALISS* « Non-Commuté » définit un tronçon *ALISS* amputé de ses électroniques de commande et de puissance. Seuls les conducteurs et le châssis métallique sont présents. Les conducteurs de surface en Inox sont raccordés aux rails de roulement dans chaque module pour fixer leur potentiel. Chaque tronçon *ALISS* mesurant 5 mètres, 32 modules composent le secteur *ALISS* Non-Commuté. Les 200 mètres suivants sont ensuite dédiés à *ALISS* Commuté (40 Tronçons complets, dotés des modules de puissance) [ALSTOM-01]. Un second réseau de tramway sera également défini. Sur ce dernier, chaque tronçon *ALISS* sera remplacé par un tronçon équivalent doté d'une *LAC*. Cette opération nous permettra de comparer les comportements des deux structures lors de chaque simulation.

Avant d'aborder le paragraphe 4.2 qui traitera de la modélisation à proprement parler de ce réseau de tramway, le premier paragraphe va se focaliser sur l'analyse de la transition du frotteur du tramway entre deux tronçons d'alimentation par le sol.

## 4.1. Transition dynamique entre secteurs conducteurs

### 4.1.1. Analyse du scénario

Le passage du tramway entre deux secteurs conducteurs est à l'origine d'un phénomène transitoire. Comme nous l'avons évoqué dans le principe de fonctionnement d'ALISS, si le frotteur d'un tramway est situé sur le secteur 'n' de la ligne et que l'émission du signal porteur est en marche, les secteurs 'n-1', 'n' et 'n+1' seront commutés, cf. Figure 4-2 :

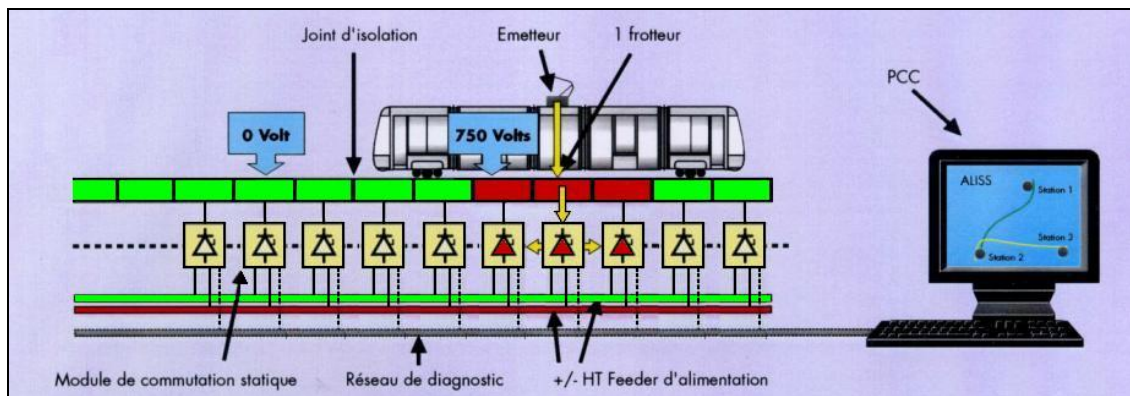


Figure 4-2 : Procédure d'alimentation des secteurs conducteurs

En régime de fonctionnement normal, lors de l'avancement du tramway, le frotteur d'un tramway effectue une transition entre deux secteurs conducteurs [MORIN-01]. La Figure 4-3 présente les trois étapes ('a', 'b' et 'c') du processus de transition dans le cas d'une ligne alimentée par une seule sous-station située à gauche des schémas (cas de la ligne de la Rochelle).

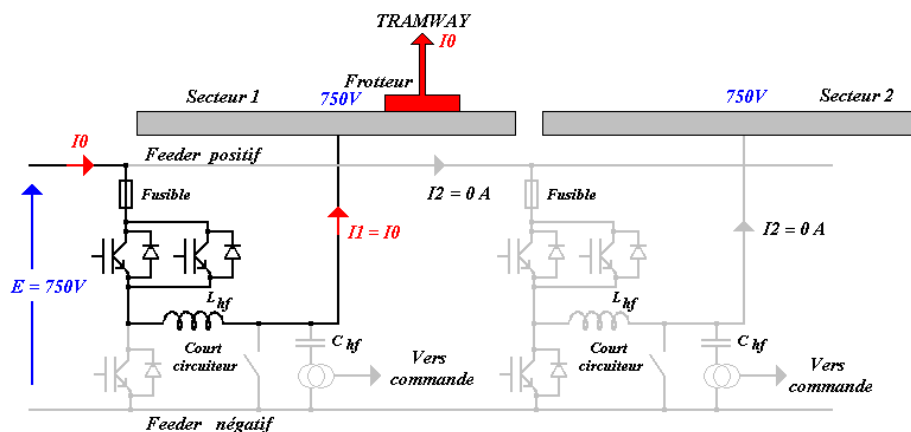


Schéma 'a'

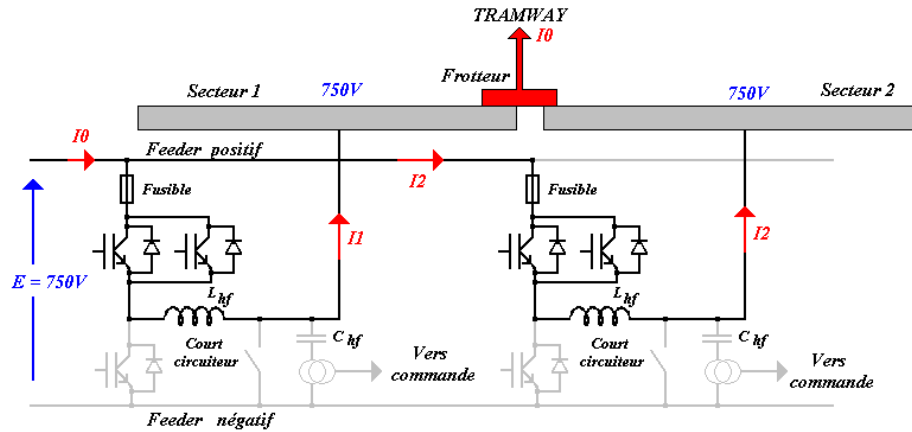


Schéma 'b'

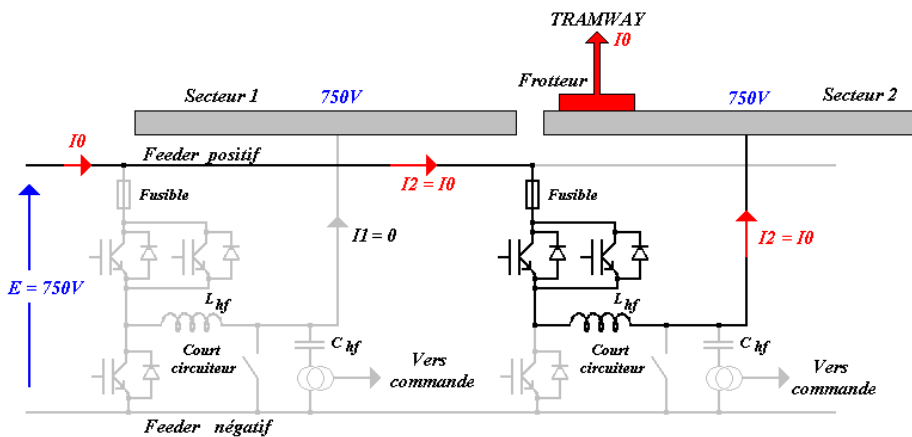


Schéma 'c'

Figure 4-3 : Illustrations de la transition entre deux secteurs conducteurs

La transition du frotteur entre deux secteurs conducteurs induit une variation dans la répartition des courants  $I_1$  et  $I_2$  délivrés respectivement par les deux modules de puissance ALISS. Cette transition dynamique suscite notre attention puisque le passage entre les schémas 'b' et 'c' implique une décroissance brutale du courant  $I_1$  (jusqu'à  $I_1 = 0 A$ ), et une augmentation brutale du courant  $I_2$  (jusqu'à  $I_2 = I_0$ ). Deux questions se posent alors :

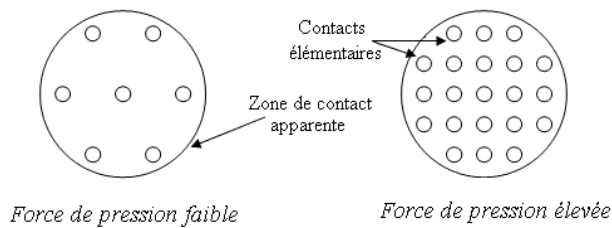
- $I_1$  et  $I_2$  transitant dans des circuits inductifs (détaillés en 4.1.2.2), la décroissance brusque de  $I_1$  (et la croissance de  $I_2$ ) risque-t-elle de provoquer une surtension destructive pour les IGBTs des modules de puissance ?
- Lors de l'extinction du courant  $I_1$ , y a-t-il un risque d'arc électrique ?

Pour répondre à ces questions, une modélisation précise de l'évolution du contact électrique entre le frotteur du tramway et les secteurs conducteurs est nécessaire.

### 4.1.2. Modélisation du contact électrique

#### 4.1.2.1. Contact frotteur secteur

Les phénomènes de passage du courant d'un corps conducteur à un autre en contact sont complexes et dépendent de nombreux paramètres, tels que la nature des conducteurs, leur géométrie, la vitesse de déplacement ou la force de contact. Les travaux de Holm dans les années 1960 sur les contacts électriques [HOLM-67], ont par la suite suscité de nombreuses autres recherches [GREENWOOD-67] [WILLIAMSON-72] [CAVEN-91].



Physiquement, la surface d'un conducteur n'est pas régulière. Les disparités surfaciques nous obligent à raisonner statistiquement, et à différencier la surface réelle de contact de sa surface apparente, cf. Figure 4-4.

Figure 4-4 : Surfaces de contact réelle et apparente

La surface réelle de contact entre deux matériaux est la somme des surfaces des contacts élémentaires. Le nombre de contacts élémentaires  $n$  dépend de la force  $F$ , et peut être approximé par l'expression suivante [FECHANT-96]:

$$n = 2.F^{0,8} \quad \text{Équation 4-1}$$

La surface réelle de contact  $S_r$  vaut donc :

$$S_r = n.\pi.a^2 \quad \text{avec } a : \text{rayon de la surface du contact élémentaire} \quad \text{Équation 4-2}$$

Cette surface réelle de contact correspond également à la surface où la charge de rupture (caractérisée par la dureté du matériau) est atteinte :

$$S_r = \frac{F}{\xi.H} \quad \text{Équation 4-3}$$

avec :

$F$	[N]	Force de pression
$\xi$	[-]	Coefficient de dureté. Compris entre 0.3 et 0.75, il est mal connu en général
$H$	[Pa]	Pression de rupture à l'écrasement $\approx$ dureté

Dans le cas d'un contact statique entre deux matériaux identiques, la formulation de Holm simplifiée donnant la résistance de contact s'écrit :

$$R = \frac{\rho}{2.n.a} + \frac{\sigma_0}{n.\pi.a^2} \quad \text{Équation 4-4}$$

En utilisant les équations précédentes, on a :

$$R = \frac{\rho}{F^{0,9}} \sqrt{\frac{\pi \cdot \xi \cdot H}{8}} + \sigma_0 \frac{\xi \cdot H}{F} \quad \text{Équation 4-5}$$

avec :

$\rho$  [Ω.m] Résistivité des matériaux

$\sigma_0$  [Ω.m<sup>2</sup>] Résistivité superficielle des matériaux (dépend fortement de l'histoire du contact et de sa sensibilité à l'oxydation)

Le premier terme de l'Équation 4-5 correspond à la résistance de constriction et le second à la résistance de film du contact. Cette équation reste valable dans une plage dynamique assez large. Selon [BARBER-91], on peut considérer que les équations régissant le régime statique sont valables jusqu'à un déplacement des conducteurs d'environ 200 m/s. Pour nos études sur *ALISS*, nous nous appuyerons sur cette équation. Le contact frotteur secteur pourra être modélisé par une résistance de contact variable dans le temps. En effet, lors de la transition entre secteurs conducteurs, la variation de la répartition des forces de pression va engendrer une modification des surfaces de contact réelles : les résistances vont donc évoluer, cf. Figure 4-5 et Figure 4-6.

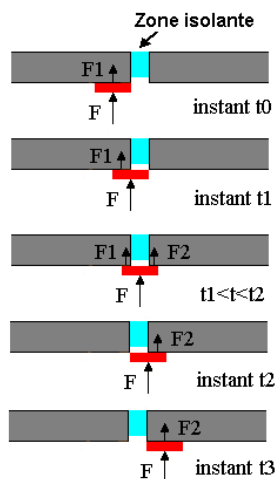


Figure 4-5 : Définition des instants clefs du régime transitoire

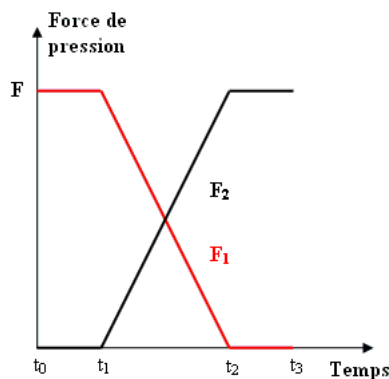


Figure 4-6 : Evolution des efforts de pression lors de la transition

La longueur du frotteur est de 270 mm. La distance d'espacement entre les secteurs conducteurs est de 50 mm. La zone isolante entre les secteurs n'étant pas à la même hauteur que les zones de contact des secteurs, la force de pression  $F$  exercée sur le frotteur n'a pas de composante sur la zone isolante. Autrement dit, la force  $F$  ne se répartit qu'en deux forces  $F_1$  et  $F_2$  s'exerçant sur les secteurs 1 et 2.

A chaque instant, on a  $F = F_1 + F_2$ .

Les pentes  $\alpha$  des deux droites sont :

$$\alpha = \pm \frac{F * \text{Vitesse Tram}}{\text{Long. Frotteur} - \text{Long. Isolant}}$$

Pour une vitesse maximum de 70 km/h, une longueur de frotteur de 270 mm, le temps de transit entre les deux secteurs (séparés de 50 mm) est de 11,3 ms.

L'évolution des forces de pression  $F_1$  et  $F_2$  conditionne les variations des résistances de contact entre chacun des secteurs conducteurs et le frotteur du tramway. Grâce aux caractéristiques intrinsèques des matériaux donnés dans le Tableau 4-1, la Figure 4-7 peut être obtenue en résolvant l'équation de Holm.

**Remarque et hypothèse :** La formulation de Holm définit la valeur de la résistance de contact entre deux matériaux identiques. Dans le cas d'étude d'ALISS, les deux matériaux en contact sont de nature différente : le frotteur est construit à partir d'un alliage Carbone / Cuivre 22 %, alors que le secteur conducteur est en Inox. Pour nos modélisations, nous utiliserons la formule de Holm pour déterminer l'évolution de la résistance de contact, mais les paramètres des matériaux (résistivité et dureté) seront choisis de manière à simuler le scénario le plus défavorable (cas d'une faible résistance de contact entre le secteur et le frotteur, cf. 4.1.2.2).

Grandeur	Libellé	Valeur	Note
$\rho_{Inox}$	Résistivité du Secteur en Inox	$500.10^{-8} \Omega.m$	Pour avoir une faible résistance de contact, nous choisirons $\rho_{Inox}$ et $H_{Carbone/Cuivre}$ dans l'équation de Holm
$\rho_{Carbone / Cuivre}$	Résistivité du Frotteur en Alliage Carbone / Cuivre.	$1000.10^{-8} \Omega.m$	
$H_{Inox}$	Charge de rupture du Secteur Inox	1000 MPa	
$H_{Carbone/Cuivre}$	Charge de rupture du Frotteur en Alliage Carbone / Cuivre.	100 MPa	
$\sigma_0$	Résistivité superficielle du contact	$5.10^{-12} \Omega.m^2$	[FECHANT-96]
$\xi$	Coefficient de dureté	0,6	
$F$	Force de pression	120 N	Ressort du tramway

Tableau 4-1 : Caractéristiques des matériaux utilisés

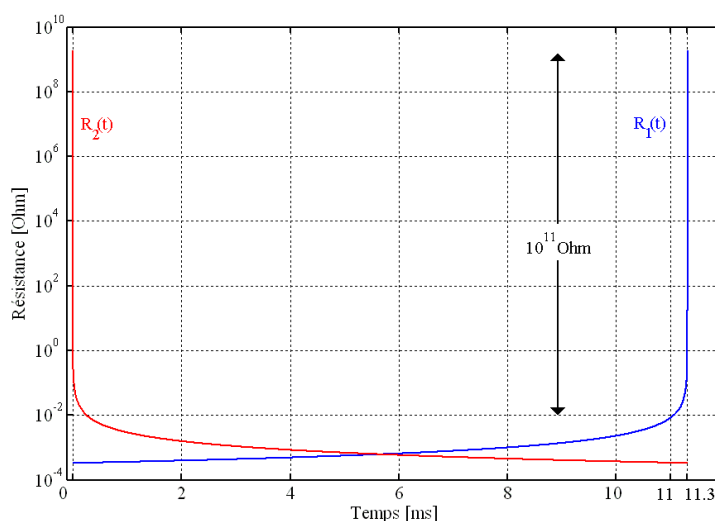


Figure 4-7 : Evolution des résistances de contact au cours de la transition

Lors du tout premier ou du tout dernier instant de transition, les résistances de contact évoluent très rapidement : en moins de 0,3 ms, la résistance augmente de  $10^{11} \Omega$ . Nous reviendrons sur le réalisme de ces observations lorsque nous évoquerons l'apparition éventuelle d'un arc électrique.



#### 4.1.2.2. Modèle équivalent du circuit

Pour analyser l'évolution des courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$ , un modèle équivalent du circuit électrique peut être établi Figure 4-8.

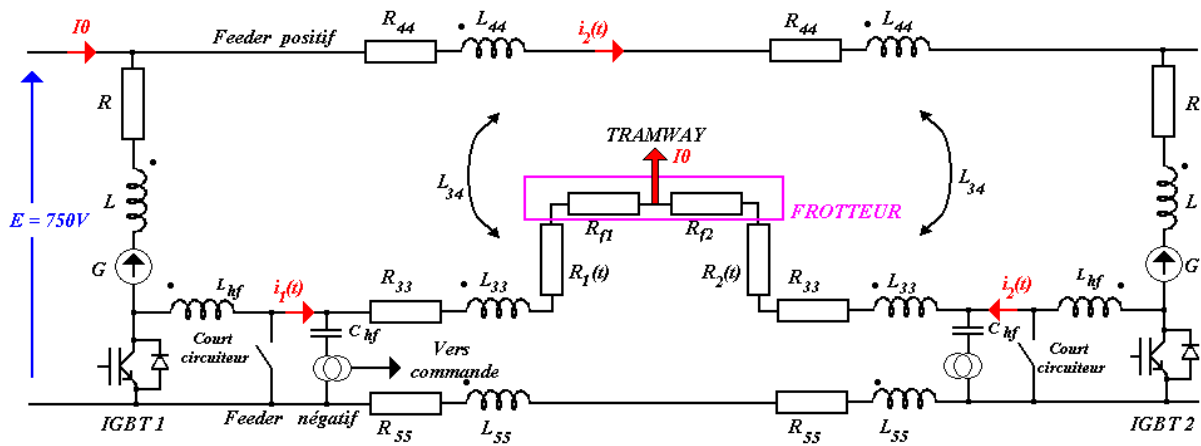


Figure 4-8 : Schéma électrique détaillé : tramway sur secteurs 1 & 2.

Les matrices inductances d'ALISS déterminées dans le chapitre 3 sont utilisées. Ainsi,  $L_{33}$  est l'inductance propre<sup>4</sup> du secteur conducteur en Inox,  $L_{44}$  est l'inductance propre du feeder positif,  $L_{55}$  est l'inductance propre du feeder négatif, et  $L_{34}$  est la mutuelle inductance entre le feeder positif et le secteur conducteur. Le réseau de la Rochelle ne possédant qu'une seule sous-station de traction (située à gauche sur la Figure 4-8), le courant  $I_0$  débité par le tramway se décompose en deux courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  circulant comme indiqué. Le courant de retour  $I_0$  du tramway est réparti symétriquement entre les deux rails de roulement. Par ailleurs, comme  $I_0$  est supposé invariant dans le temps, les mutuelles entre les rails de roulement et le feeder positif (ou le secteur inox) ne vont pas perturber le système. Il en est de même pour le feeder négatif : aucun courant ne circulant dans ce conducteur, les mutuelles avec le feeder positif ou le secteur conducteur n'auront aucune influence.

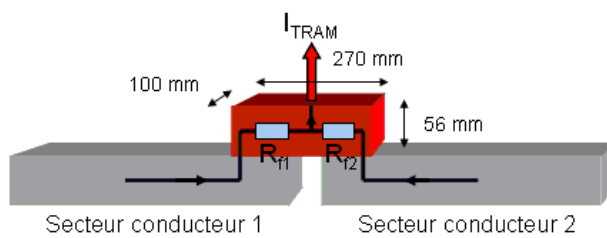
Chaque secteur conducteur mesure 5 m. En prenant comme hypothèse que le raccordement des modules de puissance ALISS s'effectue à demi longueur du secteur sol, les paramètres du système multiconducteurs doivent être déterminés pour une longueur de 2,5 m. Par ailleurs, les paramètres du circuit électrique seront déterminés à la fréquence équivalente du régime transitoire, cf. Annexe IV. Comme nous l'avons remarqué dans la Figure 4-7, la variation brusque des résistances s'effectue en 0,3 ms. Les inductances et les résistances des conducteurs seront ainsi déterminés en regard de cette durée. Le Tableau 4-2 présenté ci-après nous renseigne sur les paramètres retenus pour le schéma équivalent, à 1000 Hz.

<sup>4</sup> Nous rappelons que les inductances propres des conducteurs sont définies par rapport au sol qui est le conducteur de référence du système.

Grandeur	Valeur	Unité	Libellé
$R_{44}$	0,20	mΩ	Résistance et inductance propre du feeder positif, pour une longueur de 2,5 m
$L_{44}$	6,53	μH	
$R$	2,00	mΩ	Données issues d'une modélisation des IGBTs utilisés, de la longueur et de la nature des câbles, ainsi que des connexions [FREY-03]
$L$	1,10	μH	
$G$	1,7	V	
$L_{hf}$	5	μH	Inductance du filtre HF
$L_{34}$	3,62	μH	Mutuelle inductance entre le feeder positif et le conducteur sol en Inox, pour 2,5 m
$R_{33}$	56,00	mΩ	Résistance et inductance propre du secteur sol, pour une longueur de 2,5 m
$L_{33}$	6,33	μH	
$R_1(t)$	Équation 4-5	Ω	Résistances de contact des secteurs 1 et 2
$R_2(t)$			

Tableau 4-2 : Paramètres du circuit électrique, à une fréquence de 1000 Hz

Les résistances  $R_{f1}$  et  $R_{f2}$  sont internes au frotteur, et correspondent aux résistances respectives vues par les courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  lors de leur circulation dans le frotteur. En toute rigueur, ces résistances sont également variables dans le temps, puisque le trajet des courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  diffère selon la position du frotteur sur les secteurs conducteurs. Pour simplifier l'étude, nous prendrons comme hypothèse que ces résistances  $R_{f1}$  et  $R_{f2}$  sont constantes, telles que :  $R_{f1} = R_{f2} = R_f = 0,24 \text{ m}\Omega$ . Ces résistances sont obtenues avec la formule usuelle, cf. Figure 4-9 :



$$R_{f1} = R_{f2} = \rho_{\text{Frotteur}} \cdot \frac{L_{1/2 \text{ Frotteur}}}{S_{\text{Frotteur}}}$$

$$\rho_{\text{Frotteur}} = 10^{-5} \text{ }\Omega \cdot \text{m}$$

$$L_{1/2 \text{ Frotteur}} = 135 \text{ mm}$$

$$S_{\text{Frotteur}} = 5,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

 Figure 4-9 : Calcul des résistances  $R_{f1}$  et  $R_{f2}$ 

#### 4.1.3. Etude de la transition

L'équation différentielle régissant le comportement du courant  $i_1(t)$  pendant la transition du secteur 1 vers le secteur 2 s'écrit selon l'Équation 4-6 :

$$\left(2.L + 2.L_{hf} + 2.L_{44} - 2.L_{34}\right) \cdot \frac{di_1(t)}{dt} + \left(2.R + 2.R_{33} + 2.R_{44} + R_1(t) + R_2(t) + 2.R_f\right) \cdot i_1(t) =$$

$$\left(R + R_{33} + 2.R_{44} + R_2(t) + R_f\right) \cdot I_0$$

Équation 4-6

Certains termes comme  $G$  et  $L_{33}$  n'apparaissent pas dans l'équation car ils se simplifient dans l'expression. La résolution de cette équation différentielle du premier ordre à coefficients variables va se faire de manière numérique avec le logiciel Simulink® de Matlab®.

#### 4.1.3.1. Présentation des résultats

La Figure 4-10 donne le résultat de l'équation différentielle. Le courant  $i_2(t)$  a été déduit grâce à l'équation :  $i_1(t) + i_2(t) = I_0$ . Comme nous pouvons le constater, durant les derniers instants de transition, le courant  $i_1(t)$  décroît fortement. En 100  $\mu$ s,  $i_1(t)$  chute de plus de 600 A (Figure 4-11).

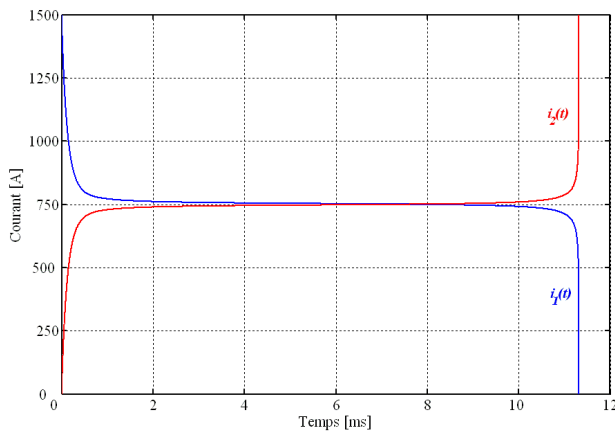


Figure 4-10 : Evolution des courants  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  au cours de la transition

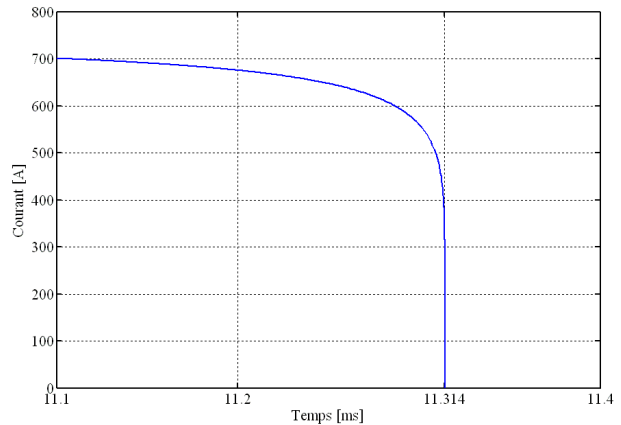


Figure 4-11 : Zoom sur l'évolution du courant  $i_1(t)$  durant les derniers instants de transition

La décroissance brusque du courant n'est pas néfaste en elle-même. Par contre, les conséquences qu'elle peut engendrer (surtension aux bornes des IGBTs, ou apparition d'une tension d'arc entre le frotteur et le secteur conducteur) peuvent l'être beaucoup plus.

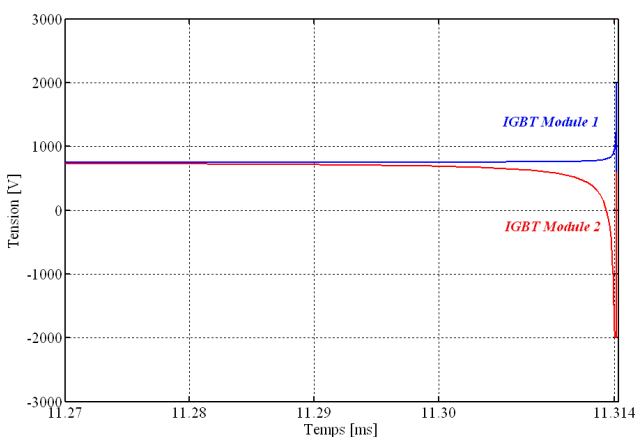


Figure 4-12 : Surtensions aux bornes des IGBTs 1 et 2 (cf. Figure 4-8)

Les IGBTs utilisés dans les modules de puissance ALISS sont du type EUPEC FZ 1200 R33 KF2. Leur tension maximale admissible est de 3,3 kV. A la vue des résultats présentés sur la figure ci-contre, les surtensions provoquées par les dynamiques brusques de  $i_1(t)$  et  $i_2(t)$  ne sont donc pas dangereuses pour ces composants (sous réserve du problème d'arc électrique que nous mentionnerons ci-après).

Pour se rendre compte de l'apparition éventuelle d'un arc électrique entre le frotteur et le secteur conducteur, la tâche est plus ardue. Lors de la séparation de deux contacts parcourus par un courant

continu, les surfaces en regard sont de plus en plus faibles. Selon [VACQUIE-95], la résistance de contact augmente, et la circulation du courant continu via cette résistance provoque un échauffement des matériaux. Une température trop élevée peut ensuite entraîner une fusion des métaux, créant de ce fait un pont fondu puis un plasma de vapeur métallique. Notre cas d'étude diffère cependant, puisque le courant  $i_I(t)$  transitant dans la résistance de contact baisse au fur et à mesure que  $R_I(t)$  augmente (ou que le tramway avance). L'étude thermochimique du problème n'étant pas viable dans cette thèse, il nous faut trouver un autre moyen pour faire un rapide constat de la situation.

L'avancement et la position du tramway lors de la transition imposent un état électrique au système. Comme nous l'avons vu, la résistance de contact  $R_I(t)$  augmente lors de la transition, alors que le courant  $i_I(t)$  décroît. La tension du contact électrique glissant peut ainsi être déterminée de manière triviale par la loi d'Ohm :

$$U_I(t) = R_I(t) \cdot i_I(t) \quad \text{Équation 4-7}$$

De manière très pragmatique, selon les propos du Professeur Gleizes<sup>5</sup> si cette tension dépasse une grandeur repère de 20 V, l'arc électrique peut être amorcé. Les Figure 4-13 et Figure 4-14 donnent l'évolution de  $U_I(t)$  pendant la transition :

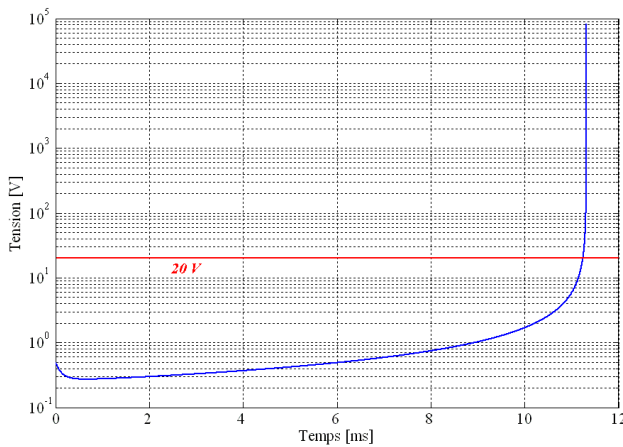


Figure 4-13 : Evolution de la tension de contact  $U_I(t)$  au cours de la transition

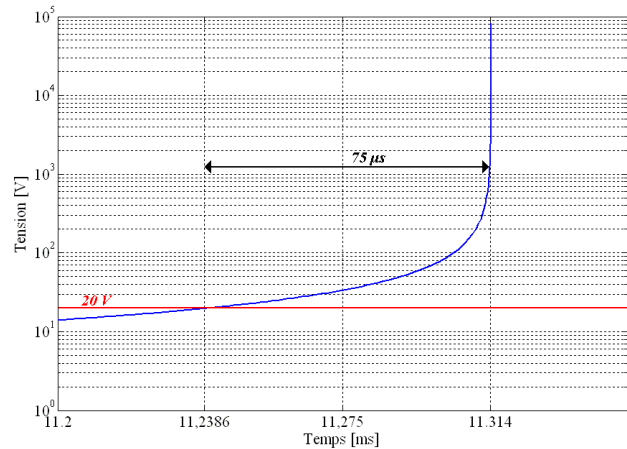


Figure 4-14 : Zoom sur la tension de contact  $U_I(t)$  durant les derniers instants de transition

En nous basant sur cette hypothèse de génération d'arc électrique, la tension  $U_I(t)$  est supérieure à 20 V pendant 75  $\mu$ s. D'ailleurs, durant les derniers instants de transition, la grandeur repère de 20 V est allègrement dépassée, puisque  $U_I(t) \approx 10^4$  V.

<sup>5</sup> Université Paul Sabatier – Toulouse - UMR 5002, Centre de Physique des plasmas et de leurs applications de Toulouse

#### **4.1.3.2. Conclusions sur la transition**

Le cas d'étude simulé est le cas le plus critique qui puisse exister. La vitesse du tramway est de 70 km/h, son courant débité est de 1500 A (cas d'un tramway Citadis 402) et les paramètres des matériaux retenus pour l'équation de Holm sont très défavorables. Par ailleurs, nous avons supposé pour la résolution du problème que la ligne de tramway n'était dotée que d'une seule sous-station (cas de la Rochelle). En pratique, sur des lignes de tramway génériques, deux sous-stations situées de part et d'autres des modules *ALISS* alimentent le système. Les courants des modules sont ainsi mieux répartis.

Les résultats des études réalisées selon le scénario présenté et les hypothèses qui lui sont associées nous poussent à affirmer qu'un arc électrique pourrait être généré durant les derniers instants de transition. La répétition successive de ces arcs électriques va alors grandement diminuer la durée des vies des matériaux utilisés.

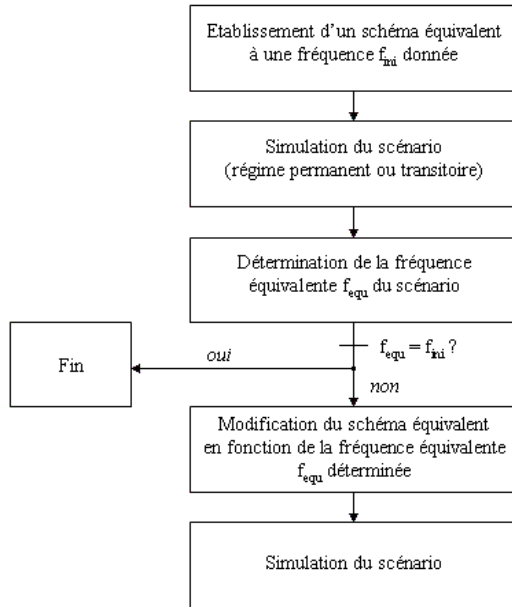
Une série d'études paramétriques a déjà été réalisée sur ce thème [MORIN-01], mais le sujet pourrait être amené plus loin, autant du point de vue de la modélisation du contact électrique glissant que des mécanismes de création d'arc.

## **4.2. Comportement dynamique du réseau de La Rochelle**

Suite aux travaux de modélisation sur les structures des réseaux d'alimentation, nous allons pouvoir comparer les comportements de la *LAC* et d'*ALISS* dans le cadre d'une mise en application sur le réseau de tramway expérimental de la Rochelle. Dans un premier paragraphe, nous établirons le schéma équivalent de la ligne de tramway. Ensuite, dans un second paragraphe, nous présenterons et comparerons les résultats obtenus pour les deux structures.

### **4.2.1. Schéma électrique équivalent de la ligne**

Avant de procéder aux simulations électriques et à leur interprétation, il est nécessaire d'établir un schéma équivalent de la ligne de tramway adapté aux scénarii à étudier. Pour ce faire, nous adopterons une démarche universelle lors de chaque simulation de régime transitoire (ou permanent) sur la ligne. La Figure 4-15 illustre la démarche retenue :



A partir d'une première simulation d'un scénario, nous calculons la fréquence équivalente à sa dynamique. Cette fréquence est issue d'une approximation du régime de fonctionnement (cf. Annexe IV). Si la fréquence équivalente est différente de la fréquence initiale nous ayant servi à dimensionner le système de transmission (*LAC* ou *ALISS*), nous effectuons une nouvelle simulation en tenant compte de la nouvelle fréquence du système.

Figure 4-15 : Etablissement d'un schéma équivalent pour une simulation électrique

Mis à part le choix des matrices caractéristiques des lignes de transmission adaptées au régime de fonctionnement étudié, la construction du schéma électrique équivalent de la ligne de la Rochelle demande de s'attarder sur les modèles de ses éléments constitutifs. Nous détaillerons ainsi les points suivants dans les prochains paragraphes :

- modèle complet d'*ALISS* (intégrant les composants de puissance, l'électronique de contrôle et son système de transmission précédemment étudié, cf. chapitre 3) ;
- sous-station de traction (associée à son réseau *AC* amont et son transformateur) ;
- matériel roulant (composé des chaînes de traction et des auxiliaires) ;

#### 4.2.1.1. Modèle complet d'*ALISS*

Le schéma de puissance d'*ALISS* est donné Figure 4-16:

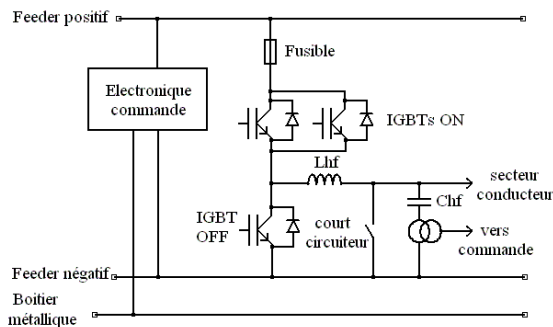


Figure 4-16 : Schéma de puissance d'un module *ALISS*

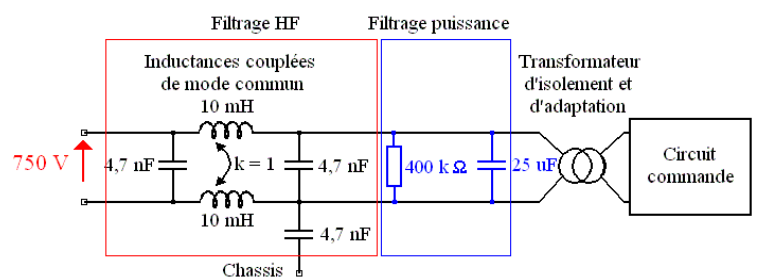


Figure 4-17 : Schéma de l'alimentation de l'électronique de commande

Les *IGBTs* utilisés sont du type EUPEC FZ1200R33KF2. Leur courant nominal est de 1200 A et leur tension d'isolement de 3300 V. Des études menées par David Frey au sein du Laboratoire d'Electrotechnique de Grenoble sur ces composants permettent d'estimer la capacité  $C_{oss}$  (capacité entre les électrodes de puissance : drain et source) à environ 10 nF [FREY-03]. Les paramètres inductifs et résistifs de ces composants seront négligés devant les inductances propres et résistances des lignes de transmission. Par ailleurs, comme nous pouvons le noter sur le schéma de l'alimentation de l'électronique de commande des modules *ALISS*, le filtre d'entrée comporte une importante capacité connectée entre les deux feeders d'alimentation (750 V et 0 V). Son influence sera remarquée par la suite. Sous 750 V, la puissance consommée par l'électronique de commande est de 70 W.

#### 4.2.1.2. Sous-station de traction

L'alimentation de la ligne d'essai de la Rochelle se fait via une seule sous-station, raccordée au réseau *AC* amont par un transformateur  $Dy_n$ . Les caractéristiques de la ligne *AC* et du transformateur sont données ci-après :

- réseau amont :  $U = 20$  kV,  $P_{cc} = 142$  MVA (Puissance de court-circuit) ;
- transformateur  $Dy_n$  : 20 kV / 585 V,  $u_{cc} = 7$  % (tension de court-circuit réduite),  $S = 1$  MVA (puissance apparente de dimensionnement).

Dans le cadre des simulations temporelles que nous allons effectuer, nous considérerons que les enroulements du transformateur sont parfaitement identiques et que les matériaux magnétiques ne sont pas saturés. Souhaitant nous focaliser uniquement sur le comportement dynamique du réseau continu, l'ensemble composé du réseau *AC* amont et du transformateur sera modélisé par une source de tension équivalente associée à une inductance  $L_s$  par phase. Le détail des calculs est rappelé ci-après :

Grandeur	Unité	Description
$m$	-	Rapport de transformation
$U_p$	V	Tension composée, primaire du transformateur
$U_s$	V	Tension composée, secondaire du transformateur
$X_p$	$\Omega$	Réactance équivalente du transformateur vue du primaire
$X_s$	$\Omega$	Réactance équivalente du transformateur vue du secondaire
$L_p$	H	Inductance équivalente du transformateur vue du primaire
$L_s$	H	Inductance équivalente du transformateur vue du secondaire

Tableau 4-3 : Grandeurs utilisées pour la modélisation du réseau amont et du transformateur

Le rapport de transformation  $m$  est défini tel que :

$$m = \frac{U_s}{U_p} = \frac{I_p}{I_s} \quad \text{Équation 4-8}$$

Donc, le rapport des réactances vues du primaire et du secondaire s'écrit :

$$m^2 = \frac{X_s}{X_p} \quad \text{Équation 4-9}$$

La réactance équivalente du transformateur vue du primaire est composée de deux termes :

$$X_p = X_{\text{Réseau amont}} + X_{\text{Transformateur}} \quad \text{Équation 4-10}$$

Avec :

$$X_{\text{Réseau amont}} = \frac{U_p^2}{P_{cc}} \quad \text{Équation 4-11}$$

$$X_{\text{Transformateur}} = u_{cc} \cdot \frac{U_p^2}{S} \quad \text{Équation 4-12}$$

L'application numérique donne  $X_{\text{Réseau amont}} = 2,8 \, \Omega$  et  $X_{\text{Transformateur}} = 28 \, \Omega$ . Notons au passage que  $X_p$  est majoritairement conditionné par la réactance du transformateur : la puissance de court-circuit du réseau influe peu. La valeur de  $L_s$  se calcule ensuite aisément. A 50 Hz, nous avons  $L_s = 81,7 \, \mu H$ .

A partir des résultats obtenus, la Figure 4-18 présente le schéma équivalent de la sous-station de traction de la Rochelle :

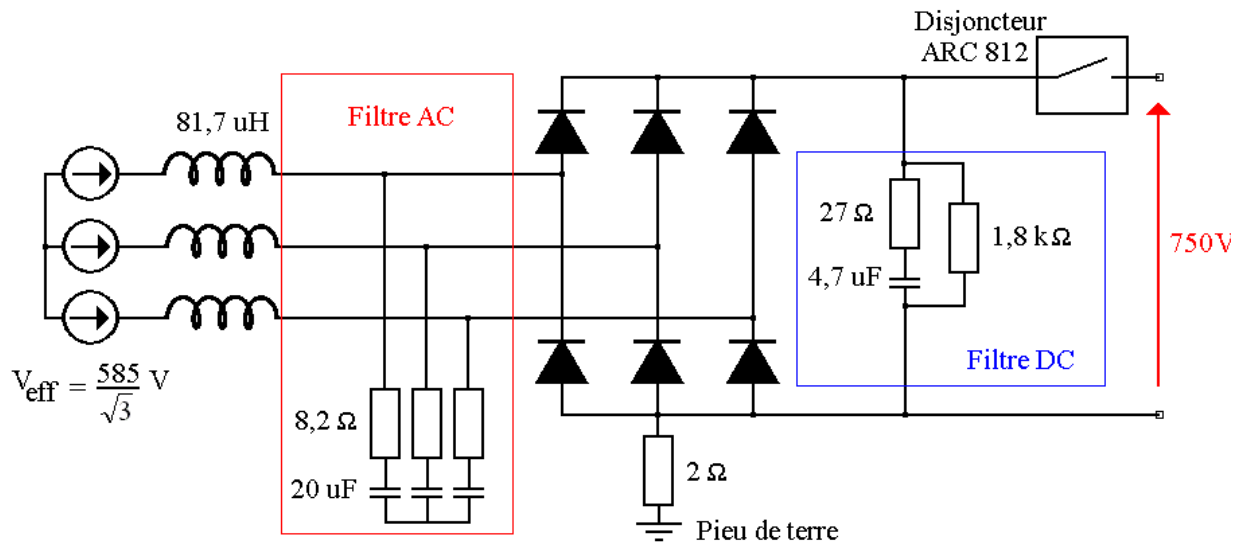


Figure 4-18 : Sous-station de traction de la Rochelle

Les diodes du pont redresseur triphasé sont fournies par l'entreprise POWEREX® sous la référence RA20. Leur courant nominal est de 3600 A. Leur tension directe est de 1,15 V et leur résistance à l'état bloqué est de 50 kΩ [POWEREX-04].



Le disjoncteur utilisé est un disjoncteur ultrarapide du type ARC 812 [ALSTOM-99]. Sa modélisation est explicitée via les Figure 4-19 et Figure 4-20 :

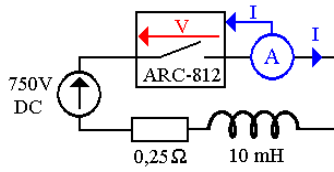


Figure 4-19 : Circuit d'étude

**Seuil de déclenchement :** 2400 A

**Retard de déclenchement :** 2 ms

**Tension d'arc :** 1000 V

**Durée de l'arc :** 5 ms

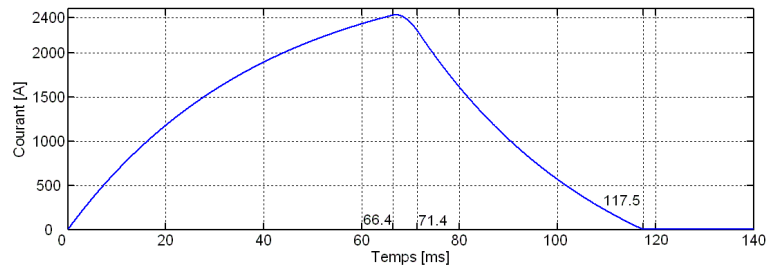
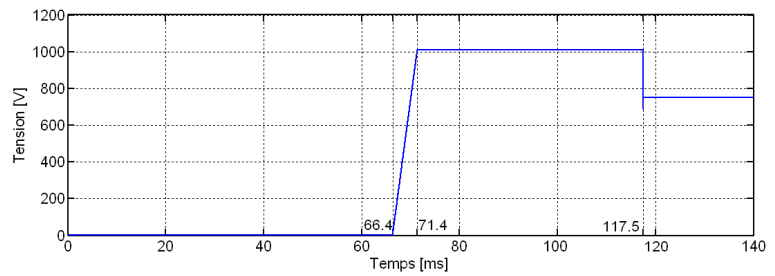


Figure 4-20 : Comportement dynamique du circuit d'étude

Grâce à l'expertise d'ALSTOM sur le disjoncteur ARC 812, les données recueillies en laboratoire [ALSTOM-00] permettent de modéliser les phénomènes mis en jeu lors de fonctionnements dynamiques. Lorsque le courant  $I$  dépasse le seuil de déclenchement du disjoncteur (2400 A), le disjoncteur commence à ouvrir son contact électrique, après un délai de 2 ms. Une tension d'arc s'établit graduellement jusqu'à 1000 V, pendant 5 ms. L'arc électrique est maintenu jusqu'à ce que le courant du circuit s'annule.

#### 4.2.1.3. Matériel roulant

Dans le cadre des simulations temporelles du réseau d'alimentation de tramway de la Rochelle, il n'est pas nécessaire de modéliser précisément les convertisseurs statiques. Les simulations que nous allons effectuer sont ciblées sur le comportement dynamique de la ligne ALISS lors de régimes normaux ou dégradés. Les chaînes de traction (onduleurs et motrices) seront ainsi modélisées comme des organes de puissance débitant un courant continu sans harmonique. Les convertisseurs statiques des auxiliaires du tramway seront également simplifiés, et seront représentés via leur puissance apparente [ALSTOM-98]. Les Figure 4-21 et Figure 4-22 donnent les schémas électriques équivalents retenus pour caractériser un tramway CITADIS 302.



comportement dynamique de cette ligne de tramway, nous pourrions nous référer à [MORIN-02]. Dans un premier temps, nous analyserons des régimes de fonctionnement normaux tels que les opérations de mise sous tension de la ligne, ou du matériel roulant. Dans un second temps, nous nous focaliserons sur deux défauts survenant sur le réseau de tramway : établissement d'un court-circuit sur la ligne et ouverture du disjoncteur du tramway en charge.

#### 4.2.2.1. Opérations de sous-station, à vide

Dans ce paragraphe, nous étudierons le comportement du réseau de la Rochelle suite à une fermeture et une ouverture du disjoncteur de la sous-station, à vide. Lors de la fermeture du disjoncteur de sous-station (instant  $t_1 = 0,1$  s), la tension à sa sortie ( $U_{D_{Js}}$  sur la Figure 4-23) augmente brusquement jusqu'à 1500 V, cf. Figure 4-24. Cette tension baisse ensuite graduellement jusqu'à 800 V environ. Ainsi en 100 ms, la tension à vide de la ligne est établie.

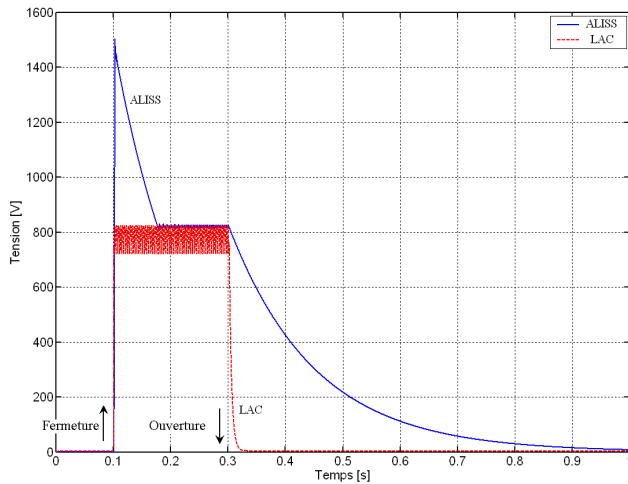


Figure 4-24 : Tension en sortie du disjoncteur de sous-station

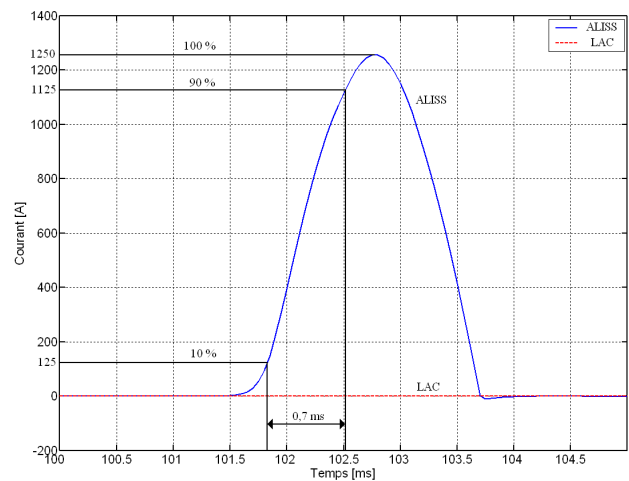


Figure 4-25 : Courant en sortie du disjoncteur de sous-station

Dans le cas de la LAC, aucune surtension n'est notable au moment de la fermeture du disjoncteur ; remarquons toutefois les ondulations à 300 Hz lors de l'établissement de la tension le long de la ligne. Pour ALISS, ces ondulations de tension sont réduites grâce à l'aspect capacitif accru du réseau.

La Figure 4-25 présente quant à elle l'allure du courant de la sous-station appelé par la ligne électrique lors de fermeture du disjoncteur. Nous voyons que ce courant augmente de 1250 A environ en 1,5 ms. Le temps de montée (défini tel que  $t_m = t_{90\%} - t_{10\%}$ ) est de 0,7 ms. La fréquence équivalente au régime transitoire peut être ainsi approximée à 500 Hz (en utilisant la formule  $f_{equ} = 0,35 / t_m$  présentée dans l'Annexe IV). Dans le cas d'ALISS, les matrices caractéristiques  $L$ ,  $C$  et  $R$  devront donc être calculées pour cette fréquence.

Le régime transitoire observé sur la Figure 4-25 est due aux capacités de la ligne *ALISS*, et plus particulièrement aux capacités de l'alimentation de l'électronique de commande des modules. Pour s'en convaincre, nous pouvons faire un rapide calcul. Chaque alimentation de l'électronique de commande des boîtiers *ALISS* est pourvue d'une capacité de 25  $\mu\text{F}$  connectée entre les feeders positif et négatif. La mise en parallèle de 40 modules sur la ligne *ALISS* commuté donne ainsi une capacité équivalente de 1 mF. La surintensité transitoire s'exprime en fonction de la tension grâce à l'Équation 4-13 :

$$i(t) = C \cdot \frac{dV(t)}{dt} \quad \text{Équation 4-13}$$

En considérant que la tension en sortie du disjoncteur de sous-station augmente de 1500 V en 1,5 ms, la surintensité transitoire est de 1000 A. Une très grande partie du courant relevé en simulation provient donc de ces capacités. La suite des simulations nous permettra de préciser si leur présence est néfaste au système *ALISS*. Dans le cas de la *LAC*, nous noterons qu'aucune surintensité ne se produit au moment de la fermeture du disjoncteur. Les capacités parasites de la structure *LAC* n'influent donc quasiment pas sur le comportement de ce régime transitoire.

Les Figure 4-26 et Figure 4-27 donnent respectivement les allures des tensions relevées en différents points de la ligne *ALISS* entre les secteurs inox et le sol, et entre les rails de roulement et le sol. Comme nous pouvons le constater, le régime transitoire du courant de sous-station induit également des surtensions entre les conducteurs de surface et le sol. Ces tensions restent inférieures à 120 V. Elles respectent ainsi la norme EN 50122-1 établie à cet effet, pour la sécurité des personnes.

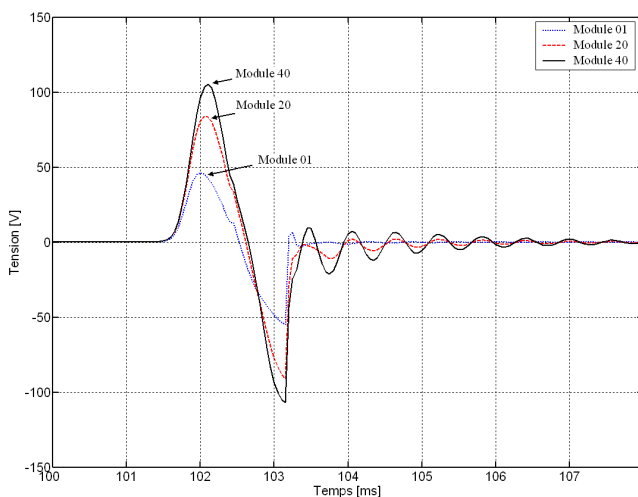


Figure 4-26 : Tensions Secteurs Inox - Sol

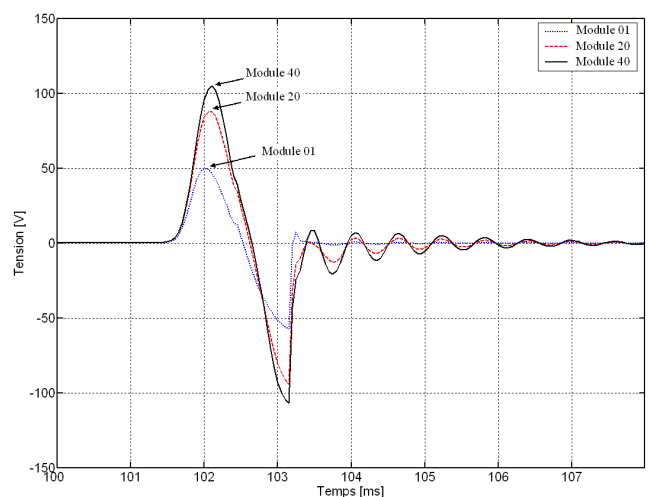


Figure 4-27 : Tensions Rails - Sol

#### 4.2.2.2. Fonctionnement du matériel roulant

Une fois la tension établie le long de la ligne de tramway, le matériel roulant raccordé va pouvoir entrer en service. Dans le cadre d'ALISS, l'émission d'un signal *HF* transitant via le frotteur est la condition *sine qua non* pour que les *IGBTs* des modules *ALISS* situés sous le tramway commutent. Une phase de précharge est ensuite nécessaire avant tout démarrage. Cette phase a pour rôle de charger la capacité du filtre de traction du tramway. Lorsqu'une tension d'environ 450 V est atteinte aux bornes de la capacité, le disjoncteur principal va se fermer à son tour. Le courant ensuite débité par le tramway représente alors le courant consommé par les auxiliaires du matériel roulant (chauffage, climatisation, chargeur de batteries, ...), c'est-à-dire environ 50 A. Les Figure 4-28 et Figure 4-29 présentent les évolutions de la tension et du courant en sortie du disjoncteur de sous-station lors de la phase de mise en route du matériel roulant. Les événements se décomposent comme l'indique le Tableau 4-4 :

Numéro	Instant	Libellé
(1)	0,1s	Fermeture du disjoncteur de la sous-station
(2)	0,3s	Emission du signal <i>HF</i> du tramway ; le tramway étant situé en bout de ligne, les secteurs 39 et 40 d'ALISS vont commuter
(3)	0,5s	Fermeture du disjoncteur de précharge du tramway
(4)	0,6s	Fermeture du disjoncteur principal du tramway
(5)	0,8s	Début de la phase de traction du tramway
(6)	1,2s	Le courant du tramway est établi à 1500 A, et se maintient

Tableau 4-4 : Détail des événements

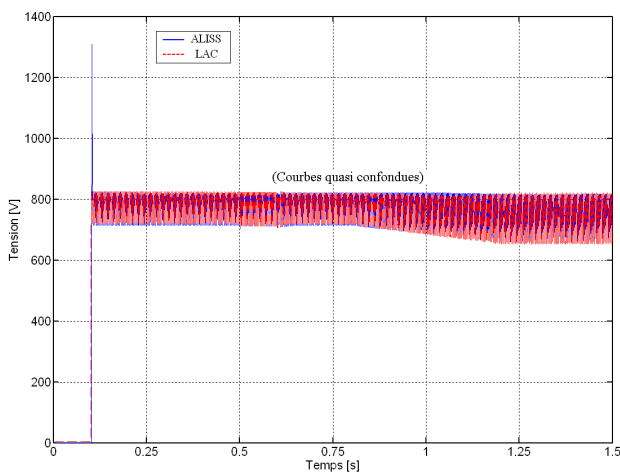


Figure 4-28 : Tension en sortie du disjoncteur de sous-station lors de la mise en route du tramway

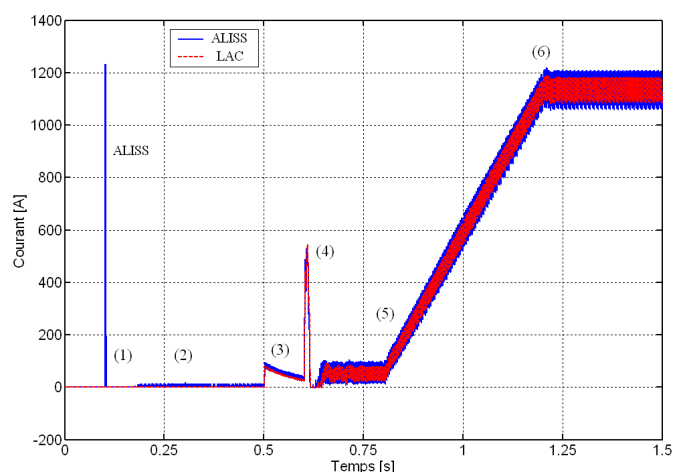


Figure 4-29 : Courant en sortie du disjoncteur de sous-station lors de la mise en route du tramway

Mis à part le régime transitoire lié à la fermeture du disjoncteur de la sous-station (1), les comportements des structures *ALISS* et *LAC* sont relativement semblables. Lors de la phase de précharge (3), le filtre de traction composé des inductances de 0,6 mH et de la capacité de 9,3 mF se

trouvent raccordé à la ligne via une résistance de  $10\ \Omega$  : la capacité se charge. Lorsque la tension aux bornes de cette capacité atteint environ 450 V, le disjoncteur du tramway se ferme, court-circuitant ainsi la résistance de précharge (4), une surintensité d'environ 500 A apparaît. Les auxiliaires sont mis en fonctionnement, débitant un courant d'environ 50 A. Entre les instants  $t = 0,6\text{ s}$  et  $t = 0,8\text{ s}$ , le courant débité par la sous-station est ainsi la somme entre les courants alimentant les électroniques de commande des modules *ALISS*, et les auxiliaires. Ce courant est bruité (fréquences de 300Hz et 600Hz, cf. Figure 4-30) car des éléments résistifs ont été insérés pour modéliser les convertisseurs statiques des électroniques de commande des modules *ALISS* et des auxiliaires. L'oscillation de tension sur la ligne de tramway est donc à l'origine des oscillations de courant.

De  $t = 0,8\text{ s}$  (5) à  $t = 1,2\text{ s}$  (6), le courant débité par le tramway augmente graduellement jusqu'à 1150 A. En pratique, l'augmentation du courant débité par le tramway n'est pas aussi rapide (le tramway met environ 15s avant d'atteindre sa vitesse de pointe), mais nous pouvons nous permettre cette entorse au fonctionnement dans le cadre des simulations (afin de limiter les temps de calcul).

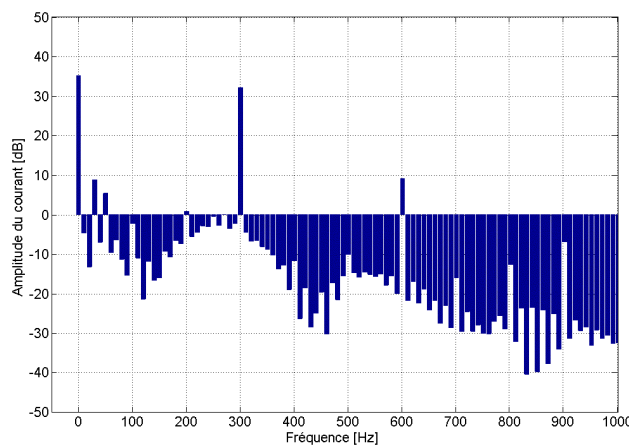


Figure 4-30 : FFT du courant de la sous-station entre les instants  $t = 0,65\text{ s}$  et  $t = 0,75\text{ s}$

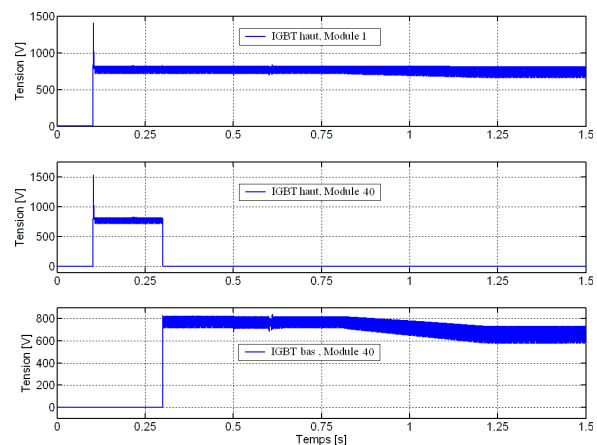


Figure 4-31 : Tensions aux bornes de quelques IGBTs pendant la mise en route du tramway

La Figure 4-31 donne les allures des tensions aux bornes de quelques IGBTs des modules *ALISS* en bout de ligne (Modules 01 et 40) pendant la phase de mise en route du matériel roulant. Mis à part l'instant de fermeture du disjoncteur de la sous-station qui provoque une surtension non néfaste aux bornes des IGBTs hauts des modules *ALISS*, la mise en route du tramway n'est à l'origine d'aucun phénomène dangereux pour l'installation.

#### 4.2.2.3. Etablissement d'un court circuit

Ce paragraphe traite de l'établissement d'un court-circuit entre le Feeder positif (ou la LAC) et les rails de roulement, en bout de la ligne de la Rochelle. Dans un premier temps, grâce à la Figure 4-32 nous

comparerons les comportements du réseau *ALISS* à celui de la *LAC*. Dans un second temps, avec la Figure 4-33, nous nous intéresserons aux effets du type de modélisation retenue (éléments finis) pour représenter la *LAC*.

Comme précédemment, les paramètres des systèmes de transmission doivent être choisis en regard de la fréquence équivalente du régime transitoire. Pour la structure *ALISS*, avec la Figure 4-32, le temps de montée du courant de court-circuit est d'environ 3 ms. D'après la formule  $f_{\text{equ}} = 0,35 / t_m$  présentée dans l'Annexe IV, la fréquence équivalente vaut environ 100 Hz. De la même manière pour la structure *LAC*, il est possible de calculer un temps de montée relatif à la dynamique du courant de court-circuit. Avec l'application numérique de la Figure 4-33,  $t_m = 5$  ms d'où  $f_{\text{equ}} = 70$  Hz.

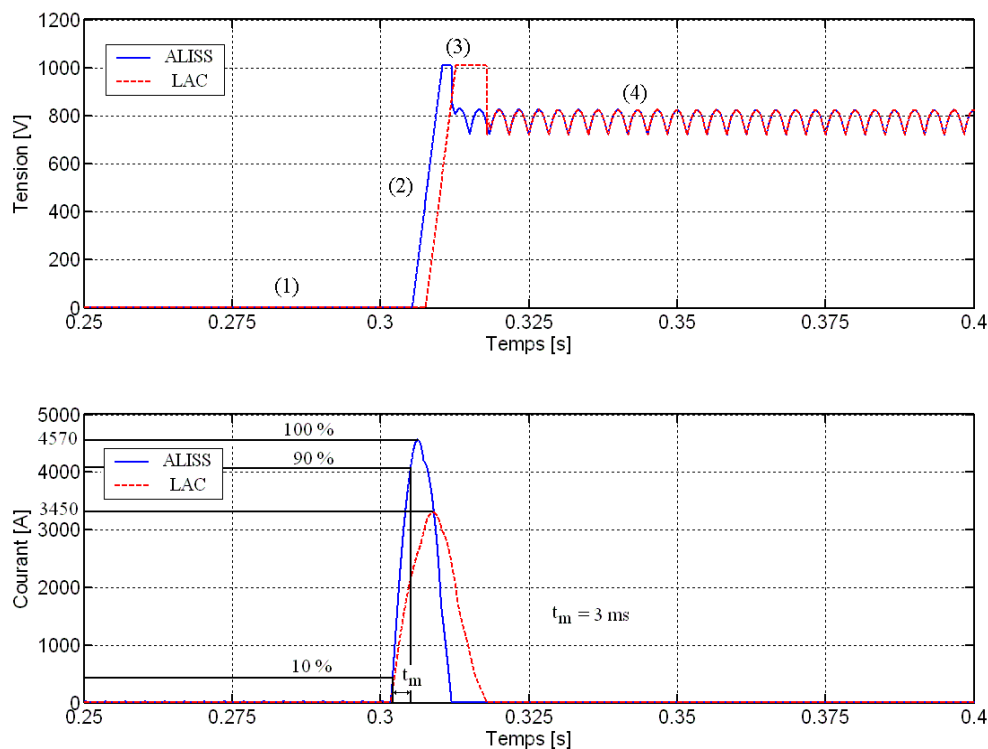


Figure 4-32 : Tension et courant en sortie du disjoncteur de sous-station lors d'un court-circuit en bout de ligne entre le feeder positif (ou la *LAC*) et les rails de roulement

Sur la Figure 4-32, pour *ALISS*, nous voyons que le courant développé à la suite d'un court-circuit augmente jusqu'à 4570 A avant d'être progressivement éteint par le disjoncteur. Pour la *LAC*, le courant de défaut atteint 3450 A. Dans le cas de l'alimentation par le sol, la dynamique des courants de court-circuit est plus importante. Un même réglage des protections induit donc un courant de défaut transitoire plus important avec *ALISS* qu'avec une *LAC*. Pour ne pas dépasser le courant de court-circuit obtenu sur la ligne avec une *LAC*, la structure *ALISS* demande un rabaissement du seuil de sensibilité du disjoncteur de la sous-station. Le schéma supérieur de la Figure 4-32 montre l'allure de la tension en sortie du disjoncteur pendant la durée du défaut. Ce schéma retrace le comportement du disjoncteur durant son fonctionnement. Comme nous l'avons déjà étudié dans la Figure 4-20, dès que

le courant de défaut dépasse le seuil de déclenchement du disjoncteur (2400 A), le disjoncteur commence à ouvrir son contact électrique, après un délai de 2 ms (2). La tension augmente progressivement jusqu'à atteindre la tension d'arc, fixée à 1000 V (3). Cette tension d'arc est maintenue jusqu'à extinction complète du courant de défaut.

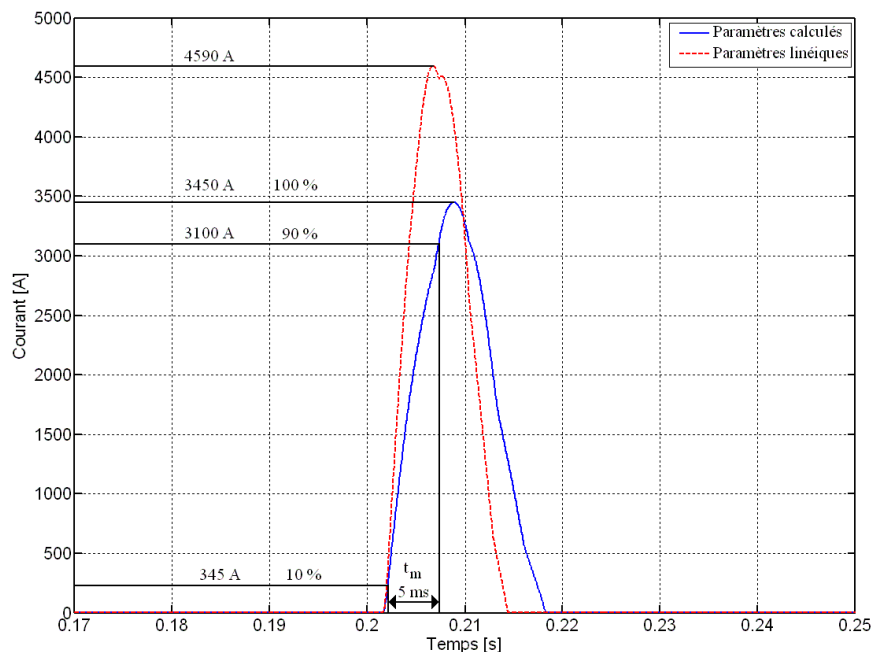


Figure 4-33 : Comparaison du courant en sortie du disjoncteur d'une LAC modélisée par les éléments finis et d'une LAC représentée par ses paramètres linéiques

La Figure 4-33 présente l'évolution du courant de court-circuit du réseau de la Rochelle équipée d'une LAC. Deux modélisations du système de transmission ont été comparées. En trait plein, la LAC est modélisée grâce à la méthode des éléments finis. En traits pointillés, la LAC est représentée grâce aux paramètres linéiques des conducteurs donnés par les constructeurs (cf. paragraphe 3.1.2.2.1). Comme nous pouvons le constater, la prise en compte de l'environnement des conducteurs grâce aux éléments finis renforce le caractère inductif du système, augmentant de ce fait la constante de temps d'établissement du courant de court-circuit. Dans le cas d'une modélisation du réseau DC grâce aux paramètres des conducteurs fournis par les constructeurs, les conséquences pratiques se chiffrent par un surdimensionnement des appareils de protection (coût accru), mais surtout par une surestimation des seuils de réglage (risques de non déclenchement !).

#### 4.2.2.4. Ouverture du disjoncteur du tramway en charge

L'ouverture du disjoncteur du tramway en charge est un défaut susceptible d'apparaître dans une exploitation, suite à une défaillance dans une chaîne de traction par exemple. La décroissance rapide du courant débité par le tramway va induire des surtensions en divers points du réseau DC à cause de



son caractère inductif. L'étude d'un tel défaut est donc importante à réaliser puisque l'utilisation de composants semi-conducteurs tels que les *IGBTs* des modules *ALISS* implique de maîtriser parfaitement les niveaux de tension du réseau, sous peine d'endommager le matériel.

Dans la simulation réalisée, le tramway débite un courant nominal de 1100 A, et son disjoncteur s'ouvre brutalement (en 3,5 ms [ALSTOM-99]) à l'instant  $t = 1,2$  s. La Figure 4-34 donne l'allure de la tension en sortie du disjoncteur de la sous-station et la Figure 4-35 présente les tensions aux bornes des *IGBTs* hauts des modules 01 et 20 d'*ALISS*.

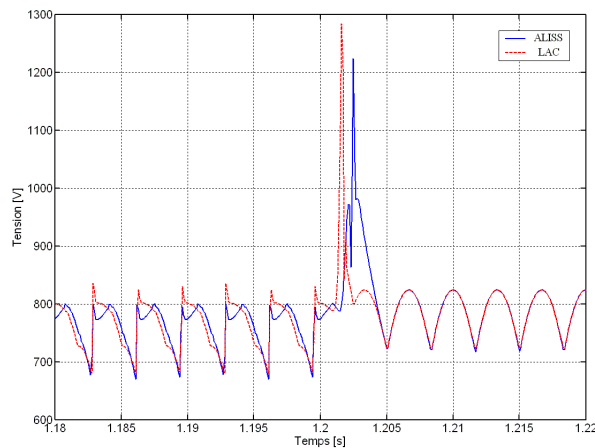


Figure 4-34 : Tension en sortie du disjoncteur de sous-station lors de l'ouverture du disjoncteur du tramway

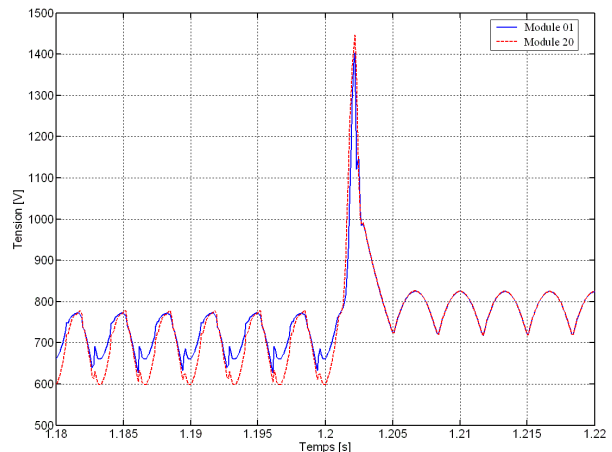


Figure 4-35 : Tension aux bornes des *IGBTs* hauts (Modules 1 et 20) lors de l'ouverture du disjoncteur du tramway

Les tensions recueillies en sous-station ou aux bornes des *IGBTs* des modules *ALISS* ne sont pas dangereuses pour l'installation. Les *IGBTs* étant dimensionnés pour une tension de 3,3 kV, la marge de tension est largement suffisante (plus de 1500 V).

### 4.3. Bilan des analyses dynamiques

Deux points majeurs ont été étudiés pour caractériser le comportement dynamique du réseau de la Rochelle. Tout d'abord, une vision localisée sur la transition du frotteur du tramway entre les secteurs conducteurs nous a permis de déceler un problème – l'arc électrique – qui reste d'ailleurs toujours non résolu. Ensuite, quelques simulations de la ligne de la Rochelle ont été réalisées, afin de caractériser le comportement du réseau *ALISS* de la Rochelle face à une structure de *LAC* déjà existante et couramment utilisée dans le monde du tramway.

Selon nos études sur la transition dynamique, lors des derniers instants de transition, un arc électrique est susceptible d'apparaître entre le frotteur du tramway et le secteur conducteur auquel le frotteur se détache. Comme nous l'avons mentionné, de plus amples recherches scientifiques seraient à mener sur

le sujet. Bien entendu, les expérimentations sur le site de la Rochelle nous auraient permis de confronter simulations et mesures.

Les simulations de la ligne expérimentale de la Rochelle sont non exhaustives. Pour de plus amples renseignements, nous pourrions nous référer à [MORIN-02]. En tout état de cause, les simulations présentées dans cette thèse, ne présentent aucun scénario dangereux pour les installations ou les composants utilisés. Nous pouvons néanmoins apporter quelques commentaires ou recommandations par rapport à la structure *ALISS* :

- l'utilisation des capacités de 25  $\mu\text{F}$  de l'électronique de commande des modules *ALISS* différencie grandement *ALISS* de la *LAC*. Le réseau *ALISS* est beaucoup plus capacitif que la *LAC* et les opérations de mise sous tension de la ligne *DC* donnent lieu à des courants de charge de ces capacités et des tensions induites. Une diminution de la valeur de ces capacités ou l'utilisation d'une structure d'alimentation différente pour l'électronique de commande des modules *ALISS* serait souhaitable ;
- le comportement dynamique de la ligne de tramway de la Rochelle est différent selon l'utilisation d'*ALISS* ou de la *LAC*. Si le réglage du disjoncteur de sous-station est identique pour les deux structures, les amplitudes des courants de court-circuit seront différentes. Une légère baisse du seuil de réglage du disjoncteur de sous-station est nécessaire dans le cas d'*ALISS* pour obtenir une amplitude de courant de court-circuit identique à celui développé avec la *LAC*.

## *Chapitre 5*

## *Table des matières du chapitre 5 :*

5.1. Prérequis de la méthode de calcul harmonique .....	109
5.2. Modélisation d'un pont redresseur monophasé .....	111
5.2.1. Eléments théoriques .....	111
5.2.2. Démarche générale de résolution .....	116
5.2.3. Définition de la taille du système, initialisation des inconnues .....	117
5.2.4. Résolution fréquentielle itérative .....	121
5.2.5. Validation .....	125
5.2.6. Cas des interharmoniques .....	126
5.3. Modélisation d'un pont redresseur triphasé .....	127
5.3.1. Eléments théoriques .....	127
5.3.2. Définition de la taille du système, initialisation des inconnues .....	132
5.3.3. Résolution fréquentielle itérative .....	134
5.3.4. Validation .....	136
5.3.5. Influence de l'empiètement sur les spectres .....	136
5.4. Réseaux simples d'étude .....	137
5.4.1. Association d'un transformateur $Dy_n$ au pont redresseur triphasé .....	138
5.4.2. Association en parallèle de ponts redresseurs monophasés .....	139
5.5. Bilan des analyses fréquentielles .....	141
5.5.1. Validité et performance .....	141
5.5.2. Perspectives .....	143

## **Chapitre 5 : Vers une analyse harmonique des réseaux d'alimentation électrique**

La quête de la fiabilité et de la disponibilité d'un réseau d'alimentation électrique de tramway, nécessite de cerner ses caractéristiques fréquentielles lors de tout régime de fonctionnement. Comme nous l'avons vu dans le chapitre 2, la méthode de calcul harmonique la plus adaptée à notre thématique semble être la méthode fréquentielle itérative, basée sur un algorithme de type Newton. Les principaux composants passifs des réseaux d'alimentation de tramway ont déjà été modélisés dans cette thèse (systèmes de transmission, transformateurs). Les chaînes de traction du matériel roulant, associant des convertisseurs statiques à commutation forcée, ont été étudiées par Marius Iordache (ALSTOM Transport Systèmes) dans le cadre de ses travaux de thèse [IORDACHE-02]. Les éléments restant à modéliser dans le domaine fréquentiel, avant de procéder à des simulations globales des réseaux d'alimentation, sont les sous-stations de traction. Ces dernières sont composées de ponts redresseurs triphasés à diodes. A la différence des éléments actifs commandés, les commutations des ponts redresseurs sont naturelles. La principale difficulté de l'étude consiste ainsi à déterminer les instants de commutation des diodes, qui eux-mêmes sont dépendants des contenus harmoniques des inconnues du système. Le problème est donc bouclé : les contenus harmoniques des signaux d'un pont redresseur déterminent les instants de commutation qui à leur tour influent sur le fonctionnement du système.

Dans un premier paragraphe, nous développerons les prérequis de la méthode fréquentielle itérative, afin d'expliquer les originalités de la programmation effectuée (avec le logiciel MATLAB®). Le deuxième paragraphe traitera de la modélisation fréquentielle du pont redresseur monophasé selon la méthode précédemment décrite, et le troisième paragraphe sera dédié au pont redresseur triphasé. Nous validerons nos travaux grâce à des comparaisons avec un outil de simulation temporelle. Nous présenterons ensuite la démarche de modélisation pour des réseaux d'étude simples avant de faire un bilan des analyses fréquentielles.

### **5.1. Prérequis de la méthode de calcul harmonique**

Comme nous l'avons mentionné, l'ensemble des calculs est effectué dans le domaine fréquentiel, en régime permanent. D'une manière générale, toute cellule de commutation, commandée ou naturelle, représente une fonction de modulation. Selon la Figure 5-1, l'équation liant le signal de sortie  $Y$  au signal d'entrée  $X$  est :

$$Y(\theta) = X(\theta) \cdot F_{\text{mod}}(\theta) \text{ avec } \theta = \omega \cdot t, \text{ et } \omega = 2 \cdot \pi \cdot f \text{ (pulsation)} \quad \text{Équation 5-1}$$

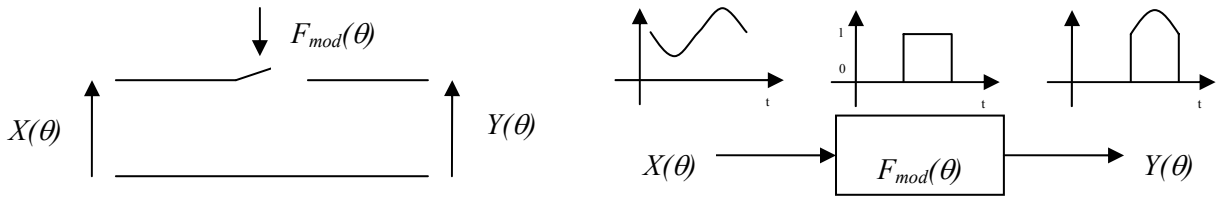


Figure 5-1 : Fonction de modulation

L'expression harmonique de la fonction de modulation est rappelée dans les équations suivantes, où  $k$  définit le rang harmonique et les angles  $\theta$  et  $\phi$  (Radians) délimitent la position des fronts de la porte [ARRILLAGA-98].

$$\forall k \in \mathbb{Z}^+ \quad F^k = \frac{j}{k \cdot \pi} \cdot (e^{-j \cdot k \cdot \phi} - e^{-j \cdot k \cdot \theta}) \quad \text{Équation 5-2}$$

$$k = 0, \quad \phi \geq \theta \quad F^0 = \frac{\phi - \theta}{2\pi} \quad \text{Équation 5-3}$$

$$k = 0, \quad \phi < \theta \quad F^0 = \frac{\phi + 2\pi - \theta}{2\pi} \quad \text{Équation 5-4}$$

Pour l'ensemble des calculs, nous avons choisi de travailler avec les grandeurs complexes sous leur forme explicite : partie réelle / partie imaginaire. Ce choix est motivé par les propriétés intéressantes offertes par ce formalisme pour traiter la modulation. En reprenant l'exemple de la Figure 5-1, l'harmonique de rang  $k$  de la fonction de modulation  $F_{mod}(\theta)$  est donné tel que :

$$\overline{F^k} = F_a^k + j \cdot F_b^k \quad \text{Équation 5-5}$$

Cette fonction de modulation  $F_{mod}(\theta)$  peut s'écrire suivant l'expression :

$$F_{mod}(\theta) = F^0 + \sum_{k=1}^{\infty} (F_a^k \cdot \cos(k \cdot \theta) + F_b^k \cdot \sin(k \cdot \theta)) \quad \text{Équation 5-6}$$

Où la partie réelle et la partie imaginaire de  $\overline{F^k}$  représentent les coefficients de Fourier :

$$F_a^k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_{mod}(\theta) \cdot \cos(k \cdot \theta) \cdot d\theta \quad \text{Équation 5-7}$$

$$F_b^k = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_{mod}(\theta) \cdot \sin(k \cdot \theta) \cdot d\theta \quad \text{Équation 5-8}$$

L'Équation 5-9 nous permet ainsi exprimer  $\overline{F^k}$  en fonction de  $F_{mod}(\theta)$ .

$$\overline{F^k} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_{mod}(\theta) \cdot (\cos(k \cdot \theta) + j \cdot \sin(k \cdot \theta)) \cdot d\theta = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_{mod}(\theta) \cdot e^{j \cdot k \cdot \theta} \cdot d\theta \quad \text{Équation 5-9}$$

Nous remarquerons dans cette dernière équation qu'il ne s'agit pas d'un développement en série Fourier traditionnel, puisque l'exponentielle est positive. Comme nous allons l'étudier, ce formalisme possède des propriétés intéressantes pour l'écriture des modulations.

La grandeur  $X$  modulée par  $F_{mod}(\theta)$  est définie selon l'expression suivante :

$$X^p(\theta) = X_a^p \cdot \cos(p \cdot \theta) + X_b^p \cdot \sin(p \cdot \theta) = \frac{1}{2} \cdot \left( \overline{X_p^p}^* \cdot e^{j \cdot p \cdot \theta} + \overline{X_p^p} \cdot e^{-j \cdot p \cdot \theta} \right), p \in \Theta^+ \quad \text{Équation 5-10}$$

Le résultat de la modulation est  $Y(\theta) = X(\theta) \cdot F_{mod}(\theta)$ . L'expression analytique de  $Y(\theta)$  est donnée par : (cf Annexe V)

$$Y^0 = \frac{1}{4} \cdot \overline{X^p}^* \cdot \overline{F^p} + \frac{1}{4} \cdot \overline{X^p} \cdot \overline{F^p}^* \quad \text{Équation 5-11}$$

$$\overline{Y^n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{X^p}^* \cdot \overline{F^{p+n}} + \frac{1}{2} \cdot \overline{X^p} \cdot \overline{F^{p-n}}^* \quad \text{Équation 5-12}$$

En remarquant dans les Équation 5-11 et Équation 5-12 que la grandeur complexe  $\overline{X^p}$  apparaît sous sa forme conjuguée, nous adopterons une écriture des équations sous forme matricielle pour la mettre en facteur. L'annexe V propose une démonstration de l'ensemble des résultats donnés dans ce paragraphe.

$$\begin{bmatrix} Y^0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \left( \begin{bmatrix} F_a^p & F_b^p \\ F_b^p & -F_a^p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_a^p & F_b^p \\ -F_b^p & F_a^p \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} X_a^p \\ X_b^p \end{bmatrix} \quad \text{Équation 5-13}$$

$$\begin{bmatrix} Y_a^n \\ Y_b^n \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{bmatrix} F_a^{p+n} & F_b^{p+n} \\ F_b^{p+n} & -F_a^{p+n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_a^{p-n} & F_b^{p-n} \\ -F_b^{p-n} & F_a^{p-n} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} X_a^p \\ X_b^p \end{bmatrix} \quad \text{Équation 5-14}$$

**Notation :** Dans la suite de la thèse, nous utiliserons la notation  $Y = F \otimes X$  pour définir le résultat  $Y$  de la modulation de  $X$  par  $F$ .

## 5.2. Modélisation d'un pont redresseur monophasé

Ce paragraphe constitue une première application de la méthode d'estimation spectrale itérative. Nous analyserons un pont redresseur monophasé, en développant les équations caractéristiques de son fonctionnement. Les résultats de simulation seront détaillés pour être enfin comparés à ceux obtenus par une approche temporelle suivie d'une *FFT*.

### 5.2.1. Éléments théoriques

La Figure 5-2 donne le schéma équivalent du pont redresseur monophasé étudié dans ce paragraphe. Les éléments du circuit sont définis dans le Tableau 5-1 :

$V_s$	Source de tension	$V_s = V_{max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ avec $V_{max} = 477 \text{ V}$ et $f = 50 \text{ Hz}$
$R$	Résistance AC	$R = 0,1 \ \Omega$
$X$	Réactance AC	$X = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \ [\Omega]$ avec $L = 80 \ \mu\text{H}$
$D1-D4$	Diodes redresseur	Composants parfaits
$Z_f$	Impédance DC	$Z_f = R_f + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_f$ avec $R_f = 100 \ \Omega$ et $L_f = 50 \ \mu\text{H}$
$I_s$	Source de courant	$I_s = I_0 + I_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t)$ avec $I_0 = 750 \text{ A}$ , $I_1 = 25 \text{ A}$ et $f_1 = 300 \text{ Hz}$

Tableau 5-1 : Paramètres du pont redresseur monophasé

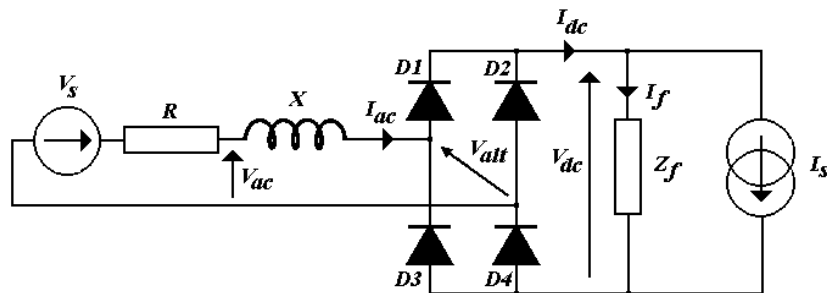


Figure 5-2 : Schéma du pont redresseur monophasé étudié

Nous choisirons pour nos études d'écrire l'ensemble des variables en fonction de  $V_{ac}$ ,  $I_{dc}$ ,  $\theta$  et  $\phi$  qui seront les inconnues du système. Ces inconnues sont regroupées dans un vecteur  $X$ , défini tel que :

$$X = \begin{bmatrix} V_{ac} \\ I_{dc} \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \text{ avec } V_{ac} = \begin{bmatrix} V_{ac}_a^0 \\ V_{ac}_b^0 \\ \vdots \\ V_{ac}_a^{n_h} \\ V_{ac}_b^{n_h} \end{bmatrix}, I_{dc} = \begin{bmatrix} I_{dc}_a^0 \\ I_{dc}_b^0 \\ \vdots \\ I_{dc}_a^{n_r} \\ I_{dc}_b^{n_r} \end{bmatrix}, \theta \in [0, 2\pi], \phi \in [0, 2\pi] \quad \text{Équation 5-15}$$

A chaque vecteur est associé un vecteur contenant ses rangs harmoniques. Ainsi, pour  $V_{ac}$  et  $I_{dc}$  par exemple, leur vecteur rang harmonique s'écrit respectivement :

$$p\_V_{ac} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ n_h \end{bmatrix}, p\_I_{dc} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ n_r \end{bmatrix} \quad \text{Équation 5-16}$$

Les vecteurs de rang harmonique sont particulièrement utiles lors de la détermination de la taille du système à résoudre. Ils permettent de prédéterminer les rangs harmoniques des variables à partir des équations du circuit électrique, sans pour autant les résoudre. Nous reviendrons plus en détails sur cette étape dans le paragraphe 5.2.3, dès lors que les équations du circuit seront explicitées.



L'impédance  $Z_f$  connectée en parallèle sur le réseau  $DC$  est de nature résistive et inductive. Le régime de conduction du pont redresseur est qualifié de continu, puisque le courant  $I_s$  ne s'annule pas. Quatre phases de conduction caractérisent une période de fonctionnement du pont redresseur monophasé. Les phases (1) et (3) sont les phases de conduction normale, et les phases (2) et (4) correspondent aux phases d'empiètement (court-circuit du pont redresseur).

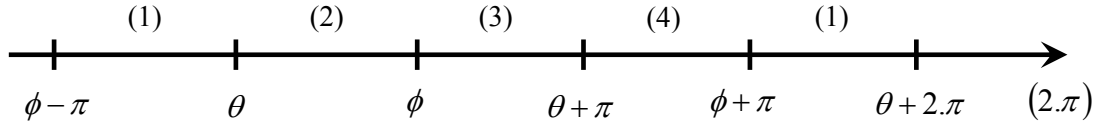


Figure 5-3 : Phases de conduction du pont redresseur monophasé (échelle non représentative)

- Phase (1) : conduction normale

$$Iac_1^k = Idc^k \quad \forall k \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{Équation 5-17}$$

$$Vdc_1^k = Vac^k - j.k.X.Idc^k \quad \forall k \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{Équation 5-18}$$

Durant cette première phase de conduction, les diodes D1 et D4 sont passantes. Les Équation 5-17 et Équation 5-18 sont établies à partir des lois des nœuds et des mailles du circuit.

- Phase (2) : empiètement (cf. Figure 5-4)

$$Iac_2^k = Icom_2^k = Ic^k - D_2 + E_2 \quad \forall k \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{Équation 5-19}$$

$$Vdc_2^k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{Équation 5-20}$$

avec :

$$Ic^k = \frac{Vac^k}{j.k.X} \quad \forall k \in \mathbb{Q}_*^+ \quad \text{Équation 5-21}$$

$$D_2 = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{nh} Ic^k \cdot e^{j.K.\theta} \right\} \quad \forall k \in \mathbb{Q}_*^+ \quad \text{Équation 5-22}$$

$$E_2 = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{nh} Idc^k \cdot e^{j.K.\theta} \right\} \quad \forall k \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{Équation 5-23}$$

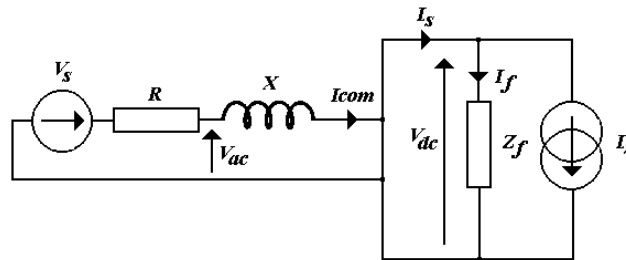
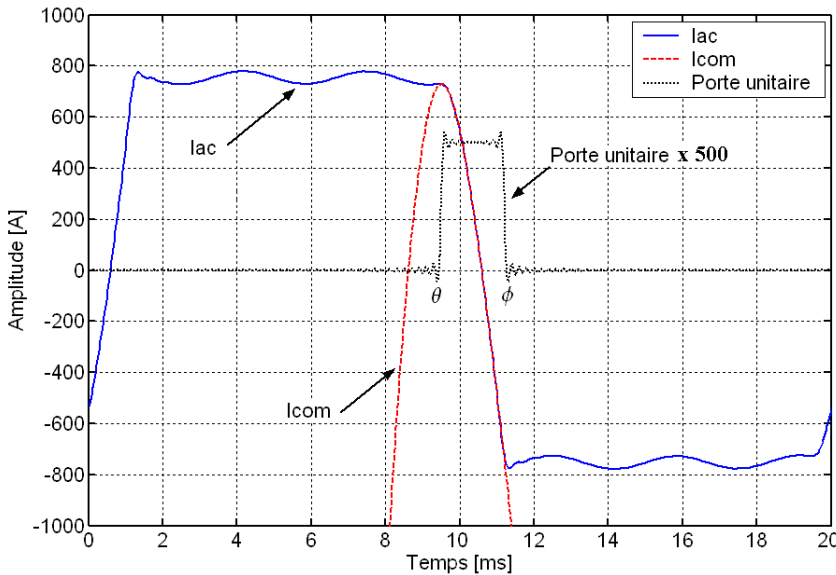


Figure 5-4 : Schéma équivalent, phase (2), régime d'empiètement

Lors de la première phase d'empiètement, un courant de commutation  $I_{com_2}$  va se développer dans le circuit. L'Équation 5-21 définit le courant de court-circuit sans tenir compte de la condition initiale. Les Équation 5-22 et Équation 5-23 déterminent les conditions initiales du courant de commutation, de telle façon qu'il soit nul à l'instant  $\theta$ . D'un point de vue mathématique, ces conditions initiales correspondent aux constantes d'intégration lors de la résolution de l'équation temporelle :

$$V_{ac}(t) = L \cdot \frac{dI_{com_2}(t)}{dt} \quad \text{Équation 5-24}$$

La Figure 5-5 présente sur la même courbe les allures des courants  $I_{ac}$  et  $I_{com_2}$  dans le cas du pont monophasé décrit précédemment. La fonction de modulation caractéristique de la phase d'empiètement est également dessinée (porte). Durant la phase d'empiètement, le courant  $I_{ac}$  est ainsi égal au produit entre le courant de commutation et la porte.



Remarque : Allure de la porte :

De manière à être représentée avec les autres courbes, la porte unitaire a été multipliée par un gain de 500. Par ailleurs, nous pouvons noter la présence de légères oscillations à proximité de ses fronts ; il s'agit du phénomène de Gibbs [ROUBINE-78].

Figure 5-5 : Illustration du courant de commutation  $I_{com_2}$

- Phase (3) : conduction normale

Les diodes D2 et D4 sont passantes.

$$I_{ac_3}^k = -I_{dc}^k \quad \forall k \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{Équation 5-25}$$

$$V_{dc_2}^k = -V_{ac}^k - j.k.X.I_{dc}^k \quad \forall k \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{Équation 5-26}$$

- Phase (4) : empiètement

$$I_{ac_4}^k = I_{com_4}^k = I_c^k - D_4 - E_4 \quad \forall k \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{Équation 5-27}$$

$$V_{dc_4}^k = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Q}^+ \quad \text{Équation 5-28}$$

avec :

$$\left. \begin{aligned} D_4 &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{nh} I_c^k \cdot e^{j.K.(\theta+\pi)} \right\} \quad \forall k \in Q_*^+ \\ E_4 &= \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{nh} Idc^k \cdot e^{j.K.(\theta+\pi)} \right\} \quad \forall k \in Q^+ \end{aligned} \right\} \text{ Conditions initiales}$$

Équation 5-29

Équation 5-30

Pour cette seconde phase d'empiètement, le principe de calcul du courant de commutation est identique à la première. Grâce à la définition des conditions initiales  $D_4$  et  $E_4$ , le courant de commutation  $Icom_4$  est nul à l'instant  $(\theta + \pi)$ . De la même manière que précédemment, ces conditions initiales correspondent aux constantes d'intégration de l'Équation 5-24.

Les équations caractéristiques des 4 états de conduction du pont redresseur sont à présent connues. Ces équations permettent de définir l'évolution de  $Iac$  et de  $Vdc$  en fonction des inconnues  $Vac$ ,  $Idc$ ,  $\theta$  et  $\phi$  pour chacun des états. Pour recomposer les variables sur une période entière de fonctionnement, il faut tenir compte de la contribution de tous les états :

$$Iac = (F_1 - F_3) \otimes Idc + F_2 \otimes Icom_2 + F_4 \otimes Icom_4 \quad \text{Équation 5-31}$$

$$Vdc = F_1 \otimes Vdc_1 + F_3 \otimes Vdc_3 \quad \text{Équation 5-32}$$

$F_i$  correspond à la fonction de modulation de l'état  $i$  du pont monophasé.  $Icom_i$  et  $Vdc_i$  sont respectivement les courants de commutation et la tension du bus  $DC$  à l'état  $i$  ; ces variables ont été définies en fonction de  $Vac$ ,  $Idc$ ,  $\theta$  et  $\phi$ . Nous rappelons que ces inconnues doivent être initialisées en début de programme. Elles seront remises à jour à chaque itération, après la résolution du système linéaire  $f(X_n) = J_n.dX_n$ .

Les fonctions erreur qui assurent la cohérence de la solution sont :

$$F_{Vac} = Yt.(Vs - Vac) - Iac \quad \text{avec la matrice } Yt = \frac{1}{R} \quad \text{Équation 5-33}$$

$$F_{Idc} = Vdc - Zf.(Idc - Is) \quad \text{Équation 5-34}$$

$$F_\theta = -\operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{nh} Vdc_1^k \cdot e^{j.k.\theta} \right\} \quad \text{Équation 5-35}$$

$$F_\phi = Idc^0 - (D_2 - E_2) + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{nh} (Ic^k - Idc^k) \cdot e^{j.k.\phi} \right\} \quad \text{Équation 5-36}$$

Les Équation 5-33 et Équation 5-34 sont obtenues simplement grâce aux lois des nœuds et des mailles du circuit. L'Équation 5-35 traduit l'étude de l'instant  $\theta$  du passage par zéro de la tension  $V_{alt}$  en entrée du pont monophasé, cf. Figure 5-2. Lorsque cette tension s'annule, l'instant  $\theta$  marque le début de la phase d'empiètement. L'Équation 5-36 définit quant à elle l'instant de fin d'empiètement, grâce à l'étude de la différence entre le courant de commutation, et le courant  $Idc$ .

Au même titre que le vecteur des inconnues, un vecteur des fonctions erreurs  $f(X)$  peut être créé. Ce vecteur renferme les contenus harmoniques de chaque fonction erreur précédemment définie. Lorsque la norme de  $f(X)$  est nulle, le vecteur  $X$  est la solution du problème. Si cette norme est supérieure à un seuil  $\varepsilon$ , il est nécessaire de recalculer  $X$ . La démarche générale de résolution d'un problème selon la méthode de Newton est illustrée dans le prochain paragraphe.

### 5.2.2. Démarche générale de résolution

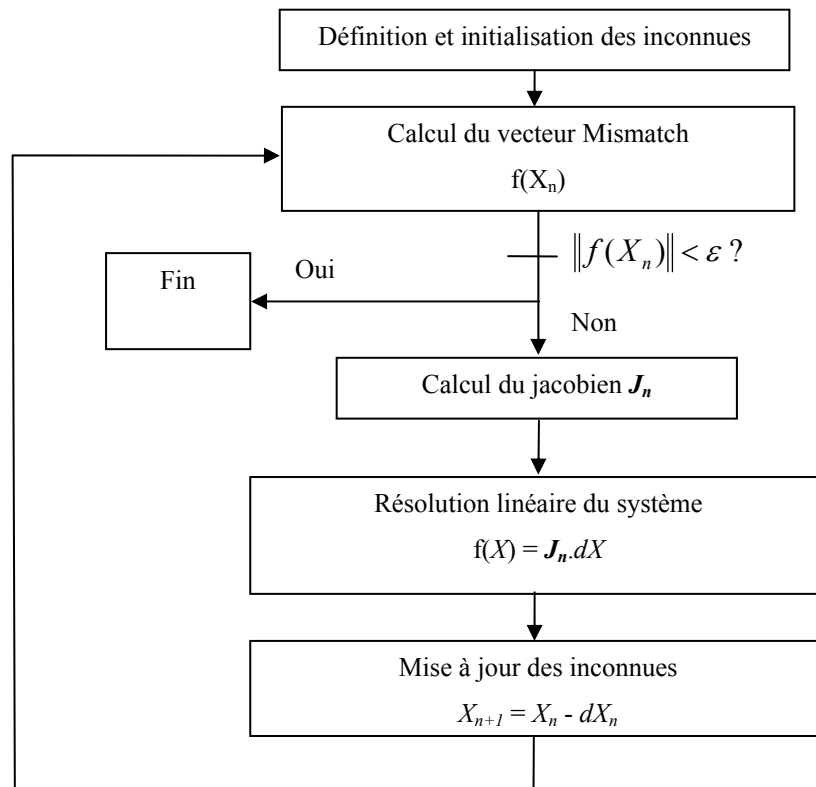


Figure 5-6 : Principe de la méthode de Newton

- *Définition et initialisation des inconnues.* Lorsque les équations du circuit sont écrites en fonction des inconnues du système (rassemblées dans un vecteur  $X_n$ ), la première étape consiste à déterminer la taille du problème et à initialiser ces inconnues, cf. paragraphe 5.2.3.
- *Calcul du vecteur Erreur.* Au même titre que le vecteur des inconnues  $X_n$ , un vecteur erreur  $f(X_n)$  est calculé. Lorsque la norme de ce vecteur est nulle ( $< \varepsilon$ ), la solution  $X_n$  du système est atteinte et le programme se termine. Lorsque sa norme est supérieure au seuil  $\varepsilon$ , le programme se poursuit.
- *Calcul du Jacobien  $J_n$ .* Le Jacobien du système est une matrice renfermant l'ensemble des dérivées partielles des fonctions erreur par rapport aux inconnues du problème. Cette matrice permet de définir les sensibilités du système vis-à-vis des diverses inconnues, et de dégager une tendance pour la convergence. Les dérivées peuvent être effectuées de manière analytique ou numérique. Pour une meilleure convergence, le choix de la dérivation analytique est

préféré, mais demande plus de calcul. Dans les cas d'étude proposés dans les paragraphes suivants, le Jacobien sera construit analytiquement.

- *Résolution du système linéaire*  $f(X_n) = J_n dX_n$ . Cette étape consiste à résoudre l'équation  $f(X_n) = J_n dX_n$  afin de déterminer le vecteur  $dX_n$ , qui définit la variation élémentaire du vecteur des inconnues  $X_n$ . Cette étape nécessite d'inverser le Jacobien (qui peut être de grande taille, exemple : matrice carrée 5000\*5000). Le logiciel MATLAB® propose toutefois plusieurs fonctions adaptées à ce type de résolution. Parmi les plus utilisées et les plus performantes, nous pouvons citer les fonctions *gmres*, *minres*, *bicg*, *lsqr*. Pour de plus amples informations sur le principe de ces fonctions, nous pourrions consulter utilement [MATLAB-04].
- *Mise à jour des inconnues*. Lorsque l'équation  $f(X_n) = J_n dX_n$  est résolue et que le vecteur  $dX_n$  est obtenu,  $X_n$  est mis à jour tel que  $X_{n+1} = X_n - dX_n$ , avec  $n$  étant le numéro de l'itération en cours. Le processus est ensuite rebouclé, vers un nouveau calcul du vecteur erreur  $f(X_n)$ .

### 5.2.3. Définition de la taille du système, initialisation des inconnues

#### 5.2.3.1. Définition de la taille du système

La détermination de la taille du système est une étape importante du processus de résolution. Cette étape permet de prédéterminer les rangs harmoniques pour l'ensemble des variables du système, sans résoudre les équations de circuit précédemment développées : cette étape est donc relativement rapide (quelques secondes). Lorsque les rangs harmoniques sont renseignés, les opérations matricielles permettant de calculer les amplitudes des variables complexes sont simplifiées, puisque la taille des vecteurs et des matrices du système est connue.

Bien que les équations de circuit précédemment développées ne soient pas résolues, elles sont tout de même utilisées pour analyser les opérations de transfert harmonique. Le principe de la détermination harmonique est basé sur de simples opérations d'addition et de soustraction :

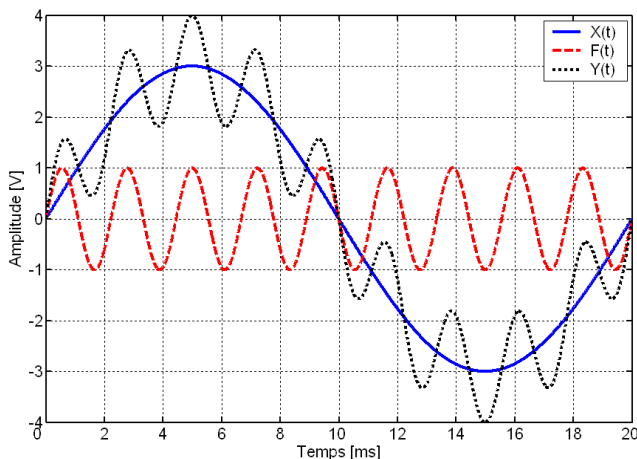
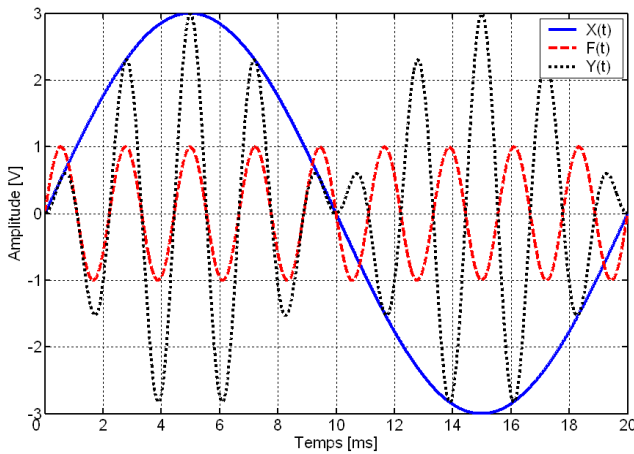


Figure 5-7 : Somme de 2 signaux sinusoïdaux

Par exemple, si les vecteurs de rang harmonique des signaux  $X$  et  $F$  sont :

$$p\_X = [1], \quad p\_F = [9], \quad p\_Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \end{bmatrix}.$$

Ces notations signifient que  $X$  possède une composante à 50 Hz, et  $F$  à 450 Hz ( $9 \times 50$  Hz).  $Y$  contient les deux fréquences. Le contenu harmonique de la somme de deux signaux est ainsi la somme des contenus harmoniques des signaux.



Autre exemple : le produit entre  $X(t)$  et  $F(t)$  donne ici  $Y(t)$ .  $Y$  est ainsi le résultat de la modulation de  $X$  par  $F$ .

Les vecteurs de rangs harmoniques sont :

$$p\_X = [1], \quad p\_F = [9], \quad p\_Y = \begin{bmatrix} 8 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$p\_Y$  est obtenu simplement en faisant les diverses additions et soustractions possibles entre les grandeurs.

Seules les fréquences positives sont représentées.

Figure 5-8 : Produit de 2 signaux sinusoïdaux

L'algorithme présenté Figure 5-9 illustre le principe de la détermination des rangs harmoniques des variables du pont redresseur monophasé :

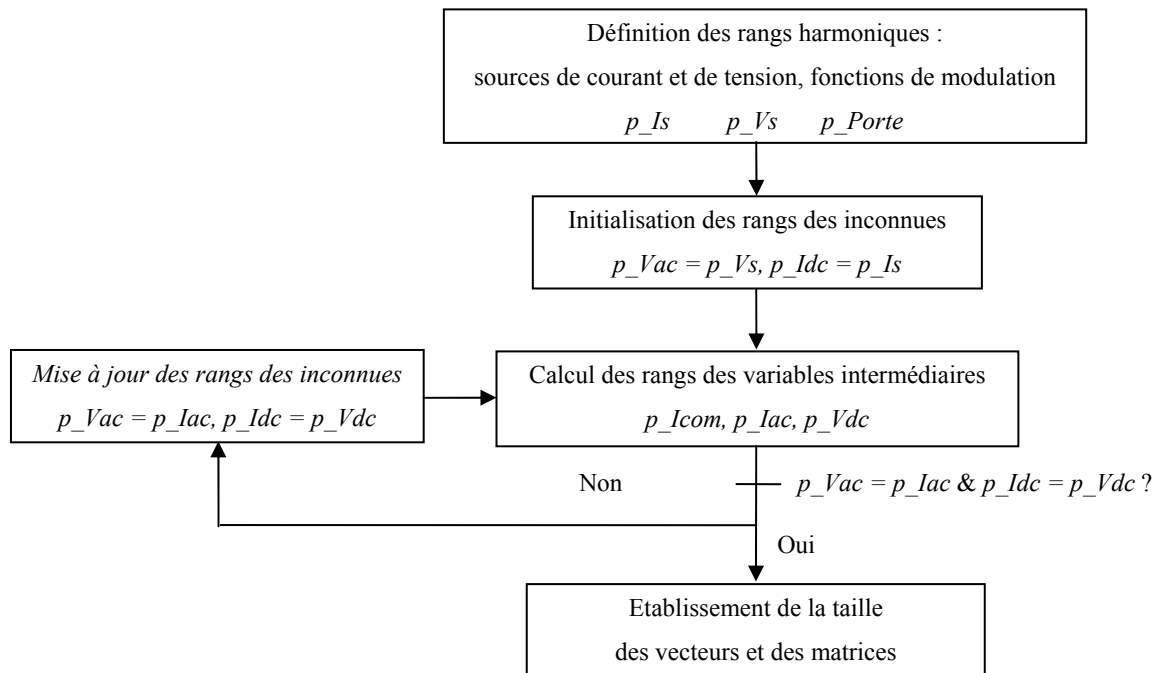


Figure 5-9 : Principe du calcul de la taille du système

- *Définition des rangs harmoniques.* Les sources de tension et de courant du circuit électrique sont les éléments connus du problème. Leur contenu harmonique est constant et fixe dans le temps. Le vecteur rang harmonique des fonctions de modulation est également connu. Comme nous l'avons mentionné précédemment (Équation 5-2), le spectre d'une porte s'étend à l'infini et intègre des composantes harmoniques pour tout multiple entier du fondamental. Néanmoins, comme dans toute étude harmonique, il est nécessaire de fixer une limite fréquentielle, correspondant à la borne supérieure de la gamme spectrale à déterminer. Pour nos cas d'étude,

la fréquence de 20 kHz est généralement retenue, d'où un rang harmonique maximum de 400 ( $400 * 50 \text{ Hz}$ ).

- *Initialisation des rangs des inconnues.*  $V_{ac}$ ,  $I_{dc}$ ,  $\theta$  et  $\phi$  sont les inconnues du système. Toutes les variables du problème ont été écrites en fonction de ces inconnues. Les contenus harmoniques de ces grandeurs ( $p_{V_{ac}}$  et  $p_{I_{dc}}$ ) nécessitent d'être initialisés en début de programme de manière à permettre tout calcul ultérieur. Les angles  $\theta$  et  $\phi$  sont quant à eux de simples scalaires (pas d'initialisation spectrale). Grâce aux sources de tension et de courant connues du problème, les vecteurs de rang harmonique  $p_{V_{ac}}$  et  $p_{I_{dc}}$  peuvent être initialisés très simplement en considérant les égalités  $p_{V_{ac}} = p_{V_s}$  et  $p_{I_{dc}} = p_{I_s}$ . Ces approximations sont certes importantes, mais elles sont suffisantes pour débiter l'algorithme.
- *Calcul des rangs des variables intermédiaires.* Les vecteurs de rang harmonique des inconnues étant initialisés, l'ensemble des variables du problème peut être calculé (grâce aux équations de circuit précédemment développées). Ces grandeurs vont ensuite nous permettre d'établir les contenus spectraux de  $I_{ac}$  et de  $V_{dc}$ .
- *Mise à jour des inconnues,* établissement de la taille des vecteurs et des matrices. Les vecteurs de rang harmonique des inconnues  $p_{V_{ac}}$  et  $p_{I_{dc}}$  sont comparés aux vecteurs des variables  $p_{I_{ac}}$  et  $p_{V_{dc}}$ . Si  $p_{V_{ac}} \neq p_{I_{ac}}$  et  $p_{I_{dc}} \neq p_{V_{dc}}$  les contenus spectraux des inconnues sont mis à jour, puis le problème est rebouclé vers un nouveau calcul des variables intermédiaires. Dans le cas où  $p_{V_{ac}} = p_{I_{ac}}$  et  $p_{I_{dc}} = p_{V_{dc}}$ , la taille des vecteurs et des matrices du problème sont déterminés. La connaissance de tous les vecteurs de rang harmonique et de la taille du système facilite ensuite le calcul des amplitudes, puisque les matrices impédances seront directement construites à la bonne taille. Le problème se résume ensuite à écrire les équations matricielles pour obtenir les variables requises.

#### Remarque : naissance des interharmoniques :

Comme nous l'avons illustré dans la Figure 5-9, le produit de deux signaux dans le domaine temporel est à l'origine de la génération d'harmonique. Par ailleurs, la signature harmonique des portes couvre l'intégralité du spectre, aux multiples entiers du fondamental. Lorsque le contenu spectral des sources de courant harmonique est également multiple entier du fondamental, la taille du système va être obtenue en une seule itération. Par contre, lorsque son contenu spectral intègre au moins une fréquence interharmonique, plusieurs itérations peuvent être nécessaire pour trouver la taille finale du problème.

#### **5.2.3.2. Initialisation des inconnues**

Grâce à la détermination de la taille du système, tous les vecteurs des inconnues et des variables du problème (vecteurs complexes) sont construits à leur taille requise respective. Au stade actuel, aucun de ces vecteurs n'est encore renseigné. Seuls les vecteurs des rangs harmoniques ont été déterminés.





#### 5.2.4. Résolution fréquentielle itérative

Lorsque le vecteur des inconnues est initialisé (ou mis à jour après chaque itération), les fonctions erreurs sont calculées, et rassemblées dans un vecteur  $f(X_n)$ . Si sa norme est supérieure à un seuil  $\varepsilon$  (fixé par l'utilisateur,  $\varepsilon = 10^{-3}$  par exemple), une matrice jacobienne  $J_n$  est créée, et l'équation  $f(X_n) = J_n.dX_n$  est résolue, cf. Équation 5-39. La solution  $dX_n$  de l'équation représente la variation à apporter à  $X_n$  pour le mettre à jour, et reboucler le processus itératif. La difficulté première de cette étape consiste à déterminer analytiquement le Jacobien du système. Ce dernier est composé de l'ensemble des dérivées partielles de  $f(X_n)$  par rapport à  $X_n$ . La Figure 5-11 donne à titre d'exemple l'allure de la matrice jacobienne pour le pont redresseur monophasé étudié, pour les 10 premiers harmoniques :

$$\begin{pmatrix} F_{Vac} \\ F_{Idc} \\ F_{\theta} \\ F_{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{Vac}}{\partial Vac} & \frac{\partial F_{Vac}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{Vac}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{Vac}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Vac} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{\theta}}{\partial Vac} & \frac{\partial F_{\theta}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{\phi}}{\partial Vac} & \frac{\partial F_{\phi}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Vac \\ \Delta Idc \\ \Delta \theta \\ \Delta \phi \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(X_n) = J_n.dX_n \quad \text{Équation 5-39}$$

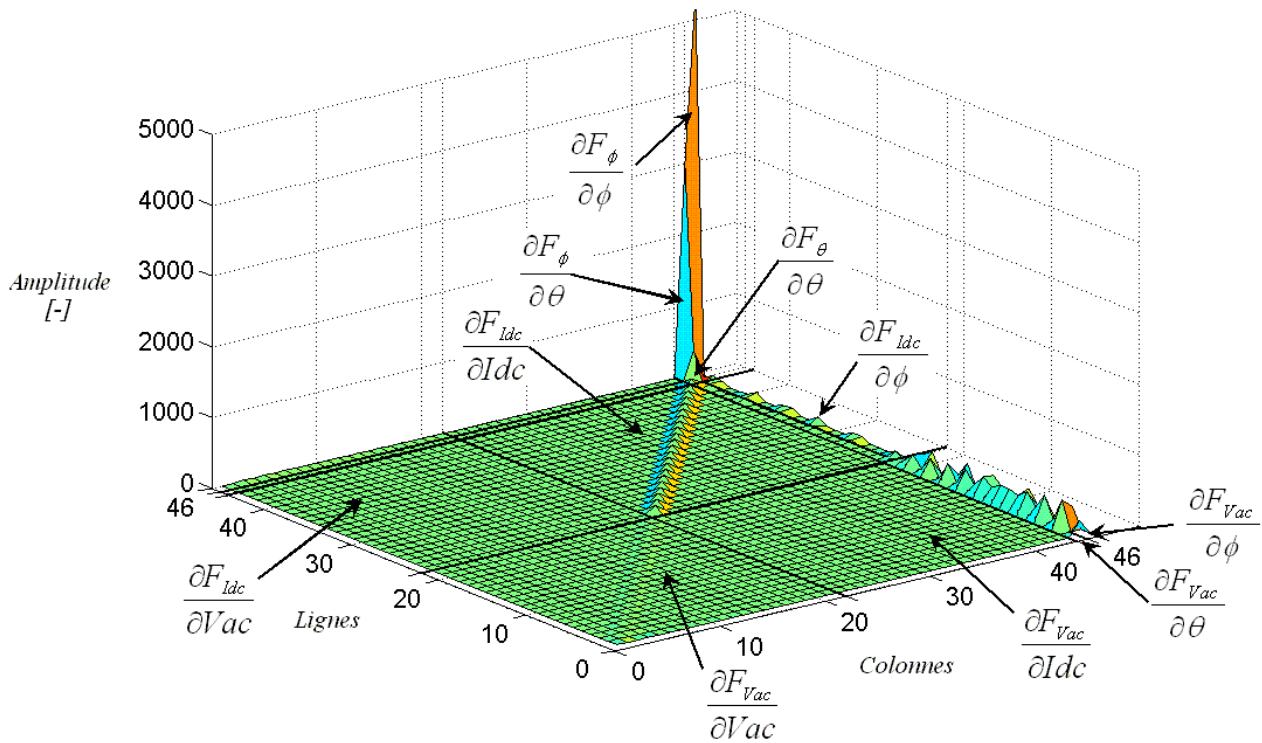


Figure 5-11 : Matrice jacobienne du pont redresseur monophasé  
Illustration des 10 premiers harmoniques

Par souci de lisibilité, toutes les dérivées partielles n'ont pas été nommées sur les figures. Pour interpréter cette figure, il suffit d'analyser l'amplitude des raies. Pour une raie donnée, plus l'amplitude est élevée, plus le système est sensible en ce point. Comme nous pouvons le constater avec la Figure 5-11, les termes les plus sensibles sont localisés sur les deux dernières colonnes. Ces colonnes contiennent respectivement les dérivées des fonctions erreur par rapport à  $\theta$  et  $\phi$ . Ces résultats nous indiquent donc une très grande sensibilité du système par rapport aux angles de conduction des diodes. Les trois raies les plus importantes de la jacobienne sont d'ailleurs clairement visibles. Il s'agit de :

$$\frac{\partial F_{\phi}}{\partial \phi}, \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \theta} \text{ et } \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta}$$

Ces observations sont logiques puisque nous savons qu'une très légère variation des angles de conduction des diodes modifie grandement les spectres des variables du système. Les Figure 5-12- Figure 5-14 présentent les effets d'une erreur de 1% sur l'angle de fin de conduction  $\phi$ .

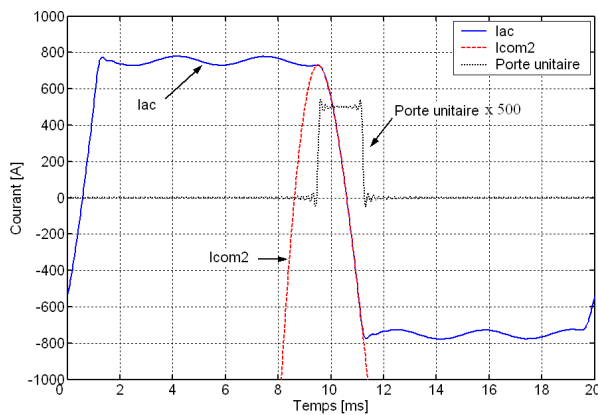


Figure 5-12 : Illustration de  $I_{ac}$  et  $I_{com2}$  avec le bon angle  $\phi$

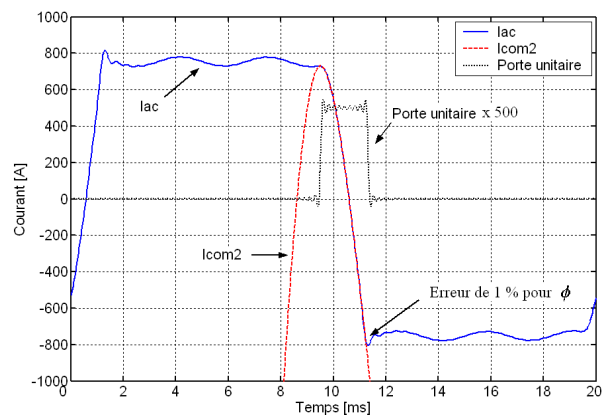


Figure 5-13 : Illustration de  $I_{ac}$  et  $I_{com2}$  avec une erreur de 1% sur l'angle  $\phi$

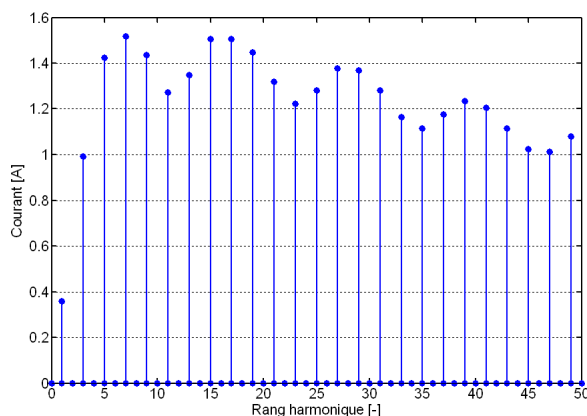


Figure 5-14 : Erreur sur le spectre de  $I_{ac}$  (fondamental = 750 A)

Dans le domaine temporel, un faible accroissement de l'angle de fin de conduction des diodes  $\phi$  (+1%) provoque une légère irrégularité sur le signal  $I_{ac}$ . Dans le domaine spectral, les conséquences harmoniques sont importantes puisque le spectre complet est affecté. L'erreur absolue est de l'ordre de 1 A par raie (harmoniques de rangs impairs).

Si l'on s'attache maintenant au zoom de la jacobienne, donnée Figure 5-15, nous pouvons remarquer que les sensibilités ne se résument pas uniquement qu'aux angles de conduction. La diagonale de la matrice présente par exemple des raies d'amplitude importante. Leur origine vient des éléments passifs du circuit. Les Équation 5-40 et Équation 5-41 donnent les dérivées partielles de ces matrices localisées sur la diagonale de la jacobienne :

$$\frac{\partial F_{Vac}}{\partial V_{ac}} = \frac{\partial}{\partial V_{ac}} [Y_t(V_s - V_{ac}) - I_{ac}] = -Y_t - \frac{\partial I_{ac}}{\partial V_{ac}} \quad \text{Équation 5-40}$$

$$\frac{\partial F_{Idc}}{\partial I_{dc}} = \frac{\partial}{\partial I_{dc}} [V_{dc} - Z_f(I_{dc} - I_s)] = -Z_f - \frac{\partial V_{dc}}{\partial I_{dc}} \quad \text{Équation 5-41}$$

Sans développer plus les expressions des dérivées, nous voyons apparaître les impédances  $Y_t$  et  $Z_f$  du circuit électrique, qui représentent des matrices diagonales dans le formalisme fréquentiel. L'ensemble des aspects techniques liés à la dérivation des termes de la jacobienne sera détaillé dans l'Annexe VI.

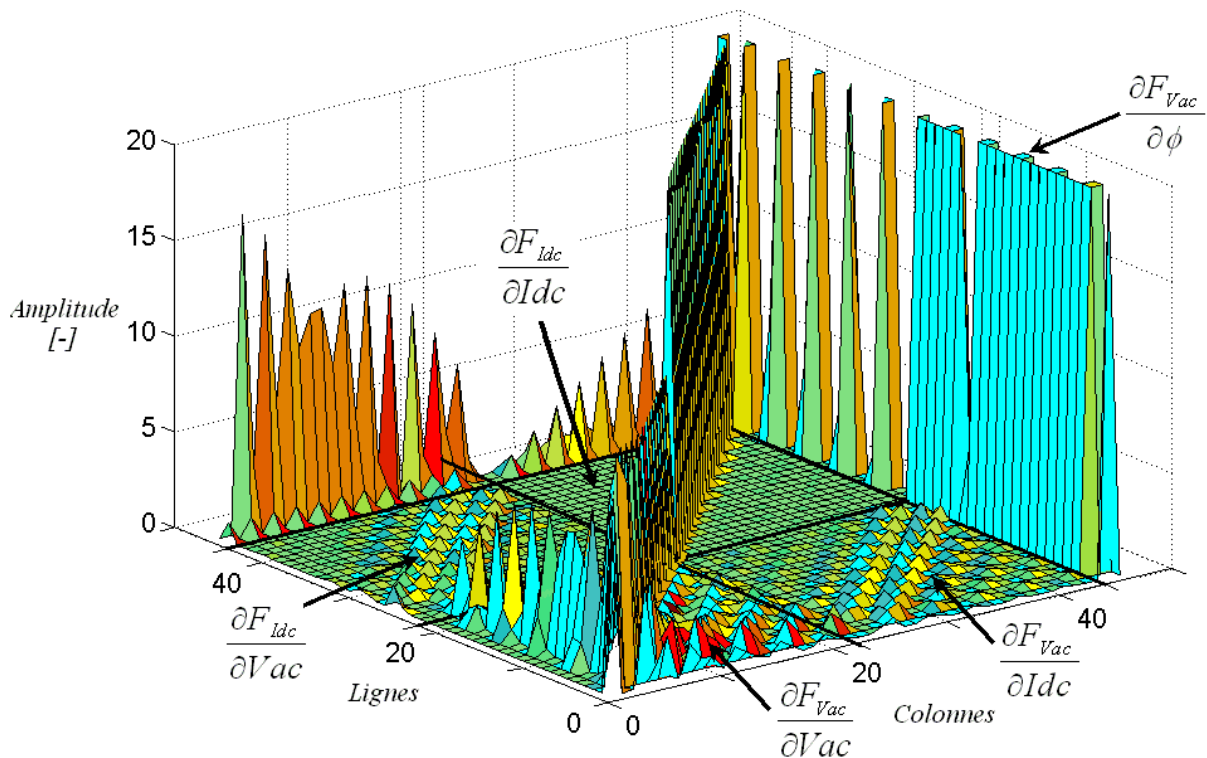
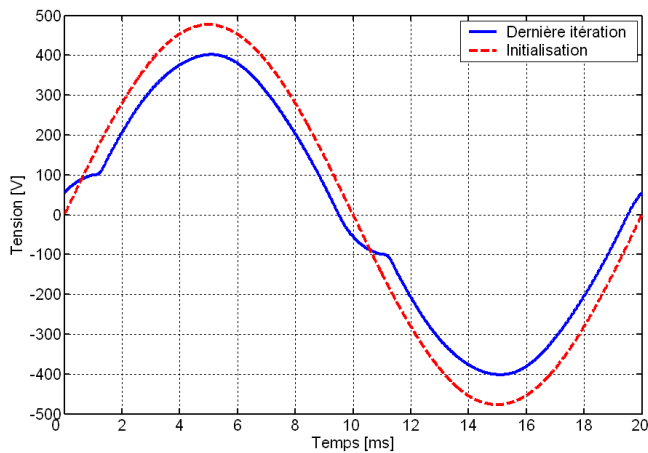
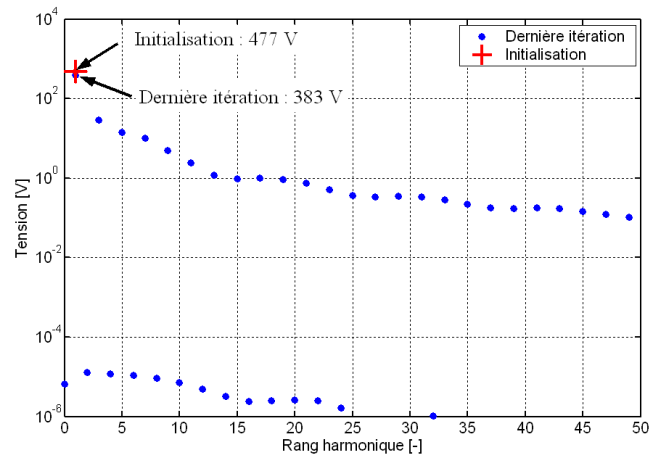


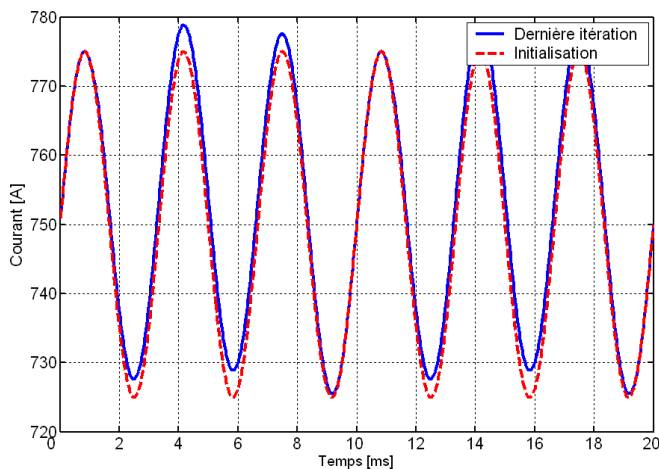
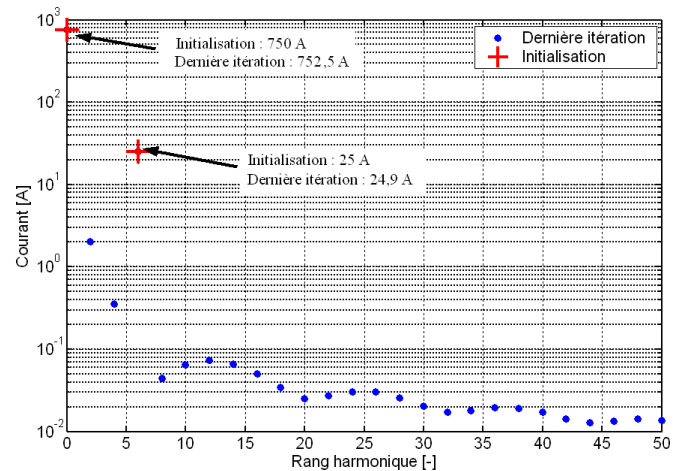
Figure 5-15 : Matrice jacobienne du pont redresseur monophasé, vue zoomée  
Illustration des 10 premiers harmoniques

La matrice jacobienne détermine les sensibilités des fonctions erreur par rapport aux inconnues du système. Elle permet d'établir une tendance pour la convergence et la résolution d'un problème. En tout état de cause, cette matrice n'a pas besoin d'être rigoureusement exacte pour permettre la convergence du processus de résolution itératif. Une bonne estimation est souvent suffisante pour que le problème converge. Cependant, grâce à la précision obtenue avec les expressions analytiques, le travail de dérivation sur les différents termes de la jacobienne porte ses fruits en termes de rapidité de

calcul. Pour le pont redresseur monophasé étudié, pour une fréquence maximum de 2,5 kHz, le programme met environ 1 min avant de donner tous les spectres du problème ( $\varepsilon = 10^{-3}$ ). Une discussion sur les nombreuses réductions des temps de calcul envisageables sera proposée en fin de chapitre. Les Figure 5-16 et Figure 5-19 illustrent les allures temporelle et spectrale de  $V_{ac}$  et de  $I_{dc}$  en début et fin de programme. Si l'on s'attache uniquement aux courbes temporelles, nous pouvons remarquer que les signaux se déforment avec les itérations. D'un point de vue fréquentiel, ces déformations se traduisent par l'apparition d'harmoniques de tension ou de courant. Les angles de conduction des diodes sont bien entendu modifiés avec les itérations. La Figure 5-20 montre leur évolution et présente par ailleurs l'allure de la norme du vecteur des fonctions erreurs  $f(X_n)$ .


Figure 5-16 : Allure temporelle de  $V_{ac}$ 

Figure 5-17 : Allure spectrale de  $V_{ac}$ 

**Remarque :** les contenus spectraux de la tension  $V_{ac}$  et du courant alternatif  $I_{ac}$  sont des multiples impairs du fondamental. Les multiples pairs sont quasi-nuls sur la Figure 5-17 car le seuil de précision  $\varepsilon$  a été défini à  $10^{-3}$ .


Figure 5-18 : Allure temporelle de  $I_{dc}$ 

Figure 5-19 : Allure spectrale de  $I_{dc}$

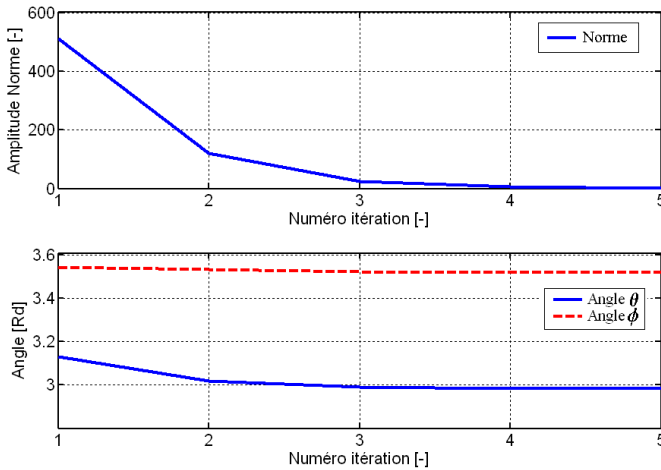


Figure 5-20 : Evolution de la norme de  $f(X_n)$  et des angles de conduction des diodes avec les itérations

Au bout de 5 itérations, la norme du vecteur des fonctions erreurs  $f(X_n)$  est inférieure au seuil  $\varepsilon$  fixé à  $10^{-3}$ . Le problème a donc convergé, et donne le vecteur des solutions  $X_n$ . Comme le montre la figure ci-contre, les angles de conduction des diodes ne varient que très légèrement avec les itérations. Mais, comme nous l'avons constaté précédemment, une légère variation de ces angles modifie conséquemment les spectres des variables du système.

### 5.2.5. Validation

La validation des résultats obtenus avec l'outil de simulation développé sous le logiciel MATLAB® va être effectuée grâce à une méthode d'estimation spectrale indirecte, basée sur la simulation temporelle du circuit. Le logiciel SABER® sera utilisé à cet effet. Suite à la simulation temporelle, une *FFT* sera réalisée sur une période du système (20 ms, puisque les contenus harmonique de la source de courant sont multiples entiers du fondamental à 50 Hz), en régime établi. Les Figure 5-21 et Figure 5-22 donnent les erreurs, en valeurs absolues, du module des spectres de  $V_{ac}$  et de  $I_{dc}$  :

$$Erreur_{Signal}^k = \left| Module_{Signal}^k_{MATLAB} - Module_{Signal}^k_{SABER} \right| \quad \text{Équation 5-42}$$

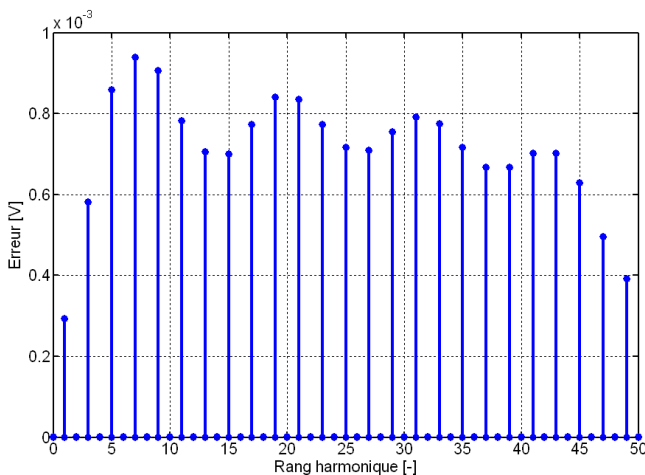


Figure 5-21 : Erreur sur le spectre de  $V_{ac}$  (fondamental = 400 V)

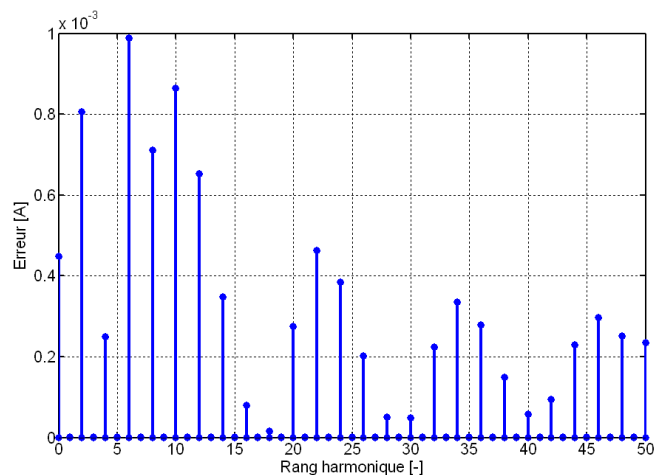


Figure 5-22 : Erreur sur le spectre de  $I_{dc}$  (fondamental = 750 A)

La précision des résultats obtenus est inférieure à 0,1 % ( $10^{-3}$ ). Nous rappelons que le seuil  $\varepsilon$  – déterminant l'atteinte de la solution du problème – a été fixé à  $10^{-3}$ . La précision des résultats obtenus est directement dépendante du seuil fixé par l'utilisateur. Une meilleure précision peut ainsi être

obtenue en abaissant ce seuil. Cependant, plus d'itérations seraient nécessaires pour converger vers la solution du problème.

En tout état de cause, sur le cas d'étude présenté, nous pouvons affirmer que la méthode d'estimation spectrale développée sous MATLAB® donne des résultats très satisfaisants. Dans le paragraphe suivant, nous développerons le cas d'un pont redresseur monophasé, où les contenus harmoniques de la source de courant  $DC$  ne sont pas des multiples entiers du fondamental.

### 5.2.6. Cas des interharmoniques

Ce paragraphe vise à présenter les résultats de simulation de la méthode de calcul harmonique développée sous MATLAB® dans le cas d'un pont redresseur monophasé, en présence d'interharmoniques. Le schéma de simulation retenu est identique à celui présenté dans le paragraphe 5.2.1, cf. Figure 5-23. Les valeurs des composants sont données dans le Tableau 5-2:

$V_S$	Source de tension	$V_S = V_{max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ avec $V_{max} = 477 \text{ V}$ et $f = 50 \text{ Hz}$
$R$	Résistance AC	$R = 0,01 \ \Omega$
$X$	Réactance AC	$X = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L \ [\Omega]$ avec $L = 80 \ \mu\text{H}$
$D1-D4$	Diodes redresseur	Composants parfaits
$Z_f$	Impédance DC	$Z_f = R_f + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_f$ avec $R_f = 100 \ \Omega$ et $L_f = 50 \ \mu\text{H}$
$I_S$	Source de courant	$I_S = I_0 + I_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t)$ avec $I_0 = 750 \text{ A}$ , $I_1 = 25 \text{ A}$ et $f_1 = 325 \text{ Hz}$

Tableau 5-2 : Valeurs des éléments du circuit électrique

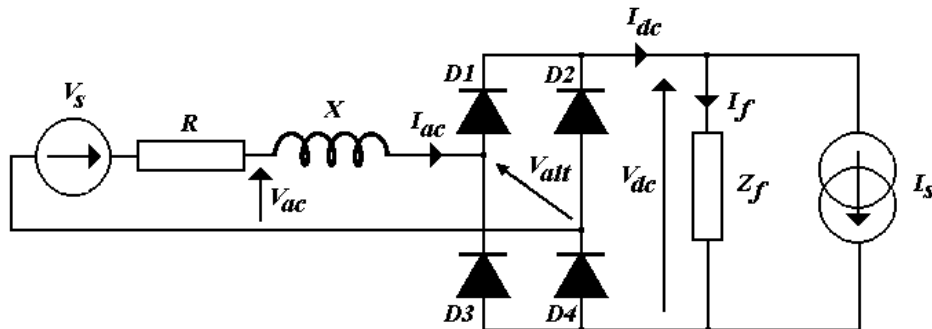


Figure 5-23 : Schéma du pont redresseur monophasé simulé

Nous noterons que deux fréquences harmoniques caractérisent la source de courant  $I_S$ . Le courant  $I_0$  est de fréquence nulle, alors que le courant  $I_1$  est à  $f_1 = 25 \text{ Hz}$ . La fréquence  $f_1$  correspond à une fréquence non entière du fondamental  $f = 50 \text{ Hz}$ . Ce point est à l'origine des interharmoniques des différentes variables du système. En effet, comme nous l'avons mis en évidence dans le paragraphe 5.1, les fonctions de modulation des diodes du pont redresseur sont définies par un spectre s'étendant à l'infini, et dont chaque raie est multiple entier du fondamental. La modulation d'un signal de fréquence non entière par les diodes donne ainsi naissance à un spectre composé d'interharmoniques (multiples impairs de  $25 \text{ Hz}$ ).

Comme précédemment, la validation des résultats obtenus avec MATLAB® va être effectuée grâce au logiciel SABER®. Dans ce cas d'étude, une période de 40 ms doit être choisie pour effectuer la FFT (car la fréquence de 25 Hz correspond au multiple commun du système). Les Figure 5-24 et Figure 5-25 donnent les erreurs, en valeurs absolues, du module des spectres de  $V_{ac}$  et de  $I_{dc}$  :

$$Erreur_{Signal}^k = \left| Module_{Signal\ MATLAB}^k - Module_{Signal\ SABER}^k \right| \quad \text{Équation 5-43}$$

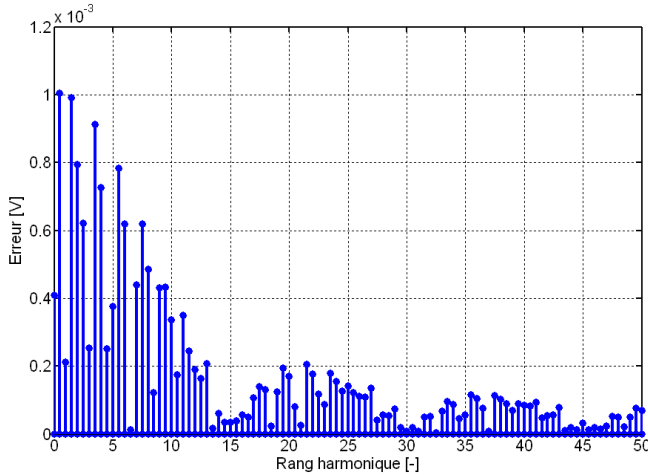


Figure 5-24 : Erreur sur le spectre de  $V_{ac}$  (fondamental = 400 V)

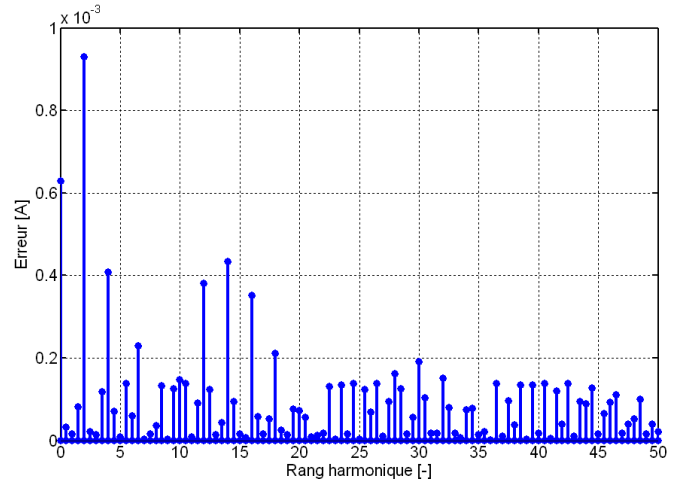


Figure 5-25 : Erreur sur le spectre de  $I_{dc}$  (fondamental = 750 A)

La précision des résultats obtenus est inférieure à 0,1 % ( $10^{-3}$ ). Ici encore, le seuil  $\varepsilon$  – déterminant l'atteinte de la solution du problème – a été fixé à  $10^{-3}$ . Les résultats obtenus avec le logiciel de simulation développé sont donc très satisfaisants, et montrent bien que la présence d'interharmonique est prise en compte convenablement.

### 5.3. Modélisation d'un pont redresseur triphasé

Le pont redresseur triphasé représente la base de la structure d'une sous-station de traction. Sa modélisation fréquentielle est une étape importante pour l'étude de réseaux plus complexes. Comme dans le cas du pont redresseur monophasé, l'écriture des équations caractérisant le fonctionnement de la structure à étudier est nécessaire avant d'aborder le processus de résolution mis en œuvre.

#### 5.3.1. Éléments théoriques

Le schéma du pont redresseur triphasé que nous allons étudier est présenté Figure 5-26. Les tensions  $V_{S_i}$  et  $V_{ac_i}$  sont référencées par rapport au point neutre  $N$ . Les valeurs des éléments du circuit sont données dans le Tableau 5-3.



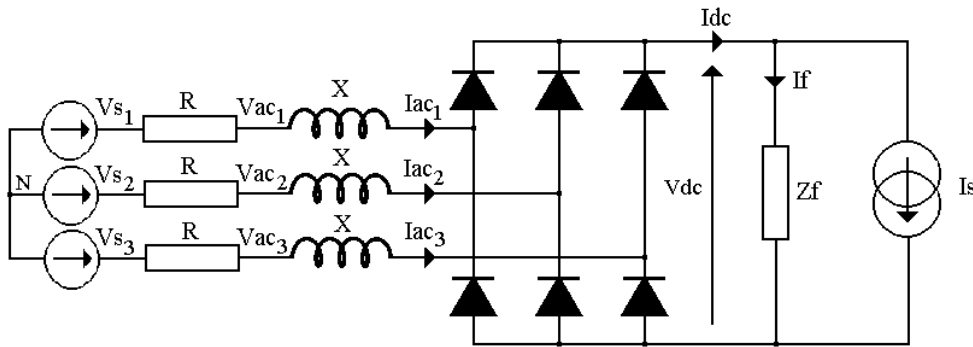


Figure 5-26 : Pont redresseur triphasé étudié

$V_{S1}$	Sources de tension	$V_{S1} = V_{max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t)$ avec $V_{max} = 477 \text{ V}$ et $f = 50 \text{ Hz}$
$V_{S2}$		$V_{S2} = V_{max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + 2 \cdot \pi / 3)$
$V_{S3}$		$V_{S3} = V_{max} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot t + 4 \cdot \pi / 3)$
$R$	Résistance AC	$R = 1 \text{ m}\Omega$
$X$	Réactance AC	$X = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L [\Omega]$ avec $L = 80 \mu\text{H}$
$Z_f$	Impédance DC	$Z_f = R_f + j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_f$ avec $R_f = 100 \Omega$ et $L_f = 50 \mu\text{H}$
$I_s$	Source de courant	$I_s = I_0 + I_1 \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f_1 \cdot t)$ avec $I_0 = 750 \text{ A}$ , $I_1 = 25 \text{ A}$ et $f_1 = 300 \text{ Hz}$

Tableau 5-3 : Caractéristiques des éléments du pont redresseur triphasé

### 5.3.1.1. Considérations générales, rappels

L'impédance  $Z_f$  connectée en parallèle sur le réseau DC est de nature résistive et inductive. Le régime de conduction du pont redresseur est qualifié de continu, puisque le courant  $I_s$  ne s'annule pas. Les sources de tension  $V_{Si}$  fournissent ainsi à chaque instant le courant nécessaire au circuit. Durant une période de fonctionnement (en régime de conduction continue), le pont redresseur triphasé passe par 12 états, décomposés en 6 états de fonctionnement 'normal' (deux diodes du redresseur sont passantes) et 6 états de fonctionnement 'en empiètement' (les trois phases sont sollicitées). Chacune des Figure 5-27 et Figure 5-28 illustre un de ces états.

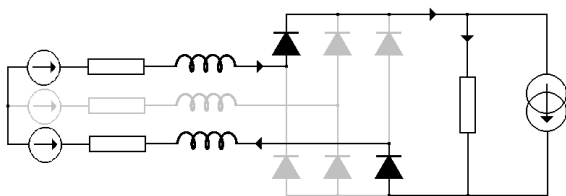


Figure 5-27 : Régime de conduction normale

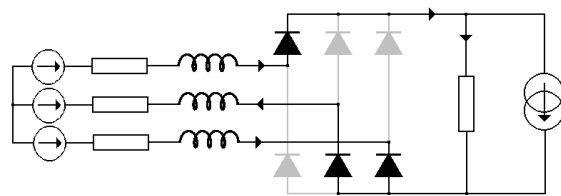


Figure 5-28 : Régime d'empiètement

Lors du régime d'empiètement, un courant de court-circuit s'établit entre deux des phases du côté alternatif. Ce courant de court-circuit est qualifié de « courant de commutation ». Son expression mathématique sera développée dans le paragraphe suivant.



### 5.3.1.2. Equations de circuit

Une succession de 12 états caractérise intégralement le fonctionnement du pont redresseur triphasé sur une période. Nous choisirons pour nos études d'écrire l'ensemble des variables en fonction des tensions alternatives  $V_{ac_i}$ ,  $i \in [1;3]$ , du courant  $I_{dc}$ , et des 12 angles de conduction des diodes  $\theta_n$  et  $\phi_n$ ,  $n \in [1;6]$ . L'ensemble de ces grandeurs composent ainsi les inconnues du problème. Dans la suite de ce rapport, nous utiliserons 3 lettres ( $b$ ,  $e$ ,  $o$ ), pour caractériser chacune des phases dans un état de conduction donné ( $b$  : *beginning conduction*,  $e$  : *end conduction*,  $o$  : *other phase*). La lettre  $p$ , en indice, indique l'état (de 1 à 12) du pont redresseur. L'exposant  $k$  précise quant à lui le rang harmonique. Ces notations sont inspirées des travaux de Bathurst sur la modélisation du pont redresseur triphasé [BATHURST-99]. Le Tableau 5-4 va nous servir de référence pour l'indexation des équations.

Etat $p$	Angle $a_i$	Angle $b_i$	$I_{ac_1}$	$I_{ac_2}$	$I_{ac_3}$	N° Phase			Equation $V_{dc_p}$
						$b$	$e$	$o$	
1	$\theta_1$	$\phi_1$	$I_{com_1}$	$-I_{dc}$	$I_{dc}-I_{com_1}$	1	3	2	5-45
2	$\phi_1$	$\theta_2$	$I_{dc}$	$-I_{dc}$	0	1	-	2	5-44
3	$\theta_2$	$\phi_2$	$I_{dc}$	$-I_{dc}-I_{com_2}$	$I_{com_2}$	3	2	1	5-46
4	$\phi_2$	$\theta_3$	$I_{dc}$	0	$-I_{dc}$	1	-	3	5-44
5	$\theta_3$	$\phi_3$	$I_{dc}-I_{com_3}$	$I_{com_3}$	$-I_{dc}$	2	1	3	5-45
6	$\phi_3$	$\theta_4$	0	$I_{dc}$	$-I_{dc}$	2	-	3	5-44
7	$\theta_4$	$\phi_4$	$I_{com_4}$	$I_{dc}$	$-I_{dc}-I_{com_4}$	1	3	2	5-46
8	$\phi_4$	$\theta_5$	$-I_{dc}$	$I_{dc}$	0	2	-	1	5-44
9	$\theta_5$	$\phi_5$	$-I_{dc}$	$I_{dc}-I_{com_5}$	$I_{com_5}$	3	2	1	5-45
10	$\phi_5$	$\theta_6$	$-I_{dc}$	0	$I_{dc}$	3	-	1	5-44
11	$\theta_6$	$\phi_6$	$-I_{dc}-I_{com_6}$	$I_{com_6}$	$I_{dc}$	2	1	3	5-46
12	$\phi_6$	$\theta_1$	0	$-I_{dc}$	$I_{dc}$	3	-	2	5-44

Tableau 5-4 : Détail des 12 états de fonctionnement du pont redresseur triphasé

- Tension bus continu :  $V_{dc}$

Le pont redresseur triphasé étudié est parfaitement équilibré : les sources de tension  $V_{S_1}$ ,  $V_{S_2}$ ,  $V_{S_3}$  sont triphasées et équilibrées, et les composants passifs  $R$  et  $X$  sont identiques sur chacune des 3 phases. Dans les équations présentées ci-après, nous considérerons cependant que  $R$  et  $X$  peuvent être différents sur les 3 phases. Les déséquilibres du réseau AC pourront être ainsi simulés.

Lors d'une phase de conduction normale, sans empiètement – cf. Figure 5-27 – la tension  $V_{dc_p}$  s'écrit :

$$p = 2, 4, 6, 8, 10, 12$$

$$V_{dc_p}^k = V_{ac_b}^k - V_{ac_o}^k - j.k.(X_b + X_o).I_{dc}^k \quad \text{Équation 5-44}$$

Lors d'une commutation positive (Figure 5-29), l'expression de  $Vdc_p$  est :

$$p = 1, 5, 9$$

$$Vdc_p^k = \frac{X_e.Vac_b^k + X_b.(Vac_e^k - j.k.X_e.Idc^k)}{X_e + X_b} - Vac_o^k - j.k.X_o.Idc^k \quad \text{Équation 5-45}$$

Lors d'une commutation négative (Figure 5-29),  $Vdc_p$  s'écrit :

$$p = 3, 7, 11$$

$$Vdc_p^k = -\frac{X_e.Vac_b^k + X_b.(Vac_e^k + j.k.X_e.Idc^k)}{X_e + X_b} + Vac_o^k - j.k.X_o.Idc^k \quad \text{Équation 5-46}$$

La recomposition du signal  $Vdc$  sur une période du système intègre la contribution des 12 états de fonctionnement du pont redresseur triphasé :

$$Vdc = \sum_{p=1}^{12} Vdc_p \otimes F_p \quad \text{Équation 5-47}$$

Comme dans le paragraphe 5.2, chaque état de fonctionnement  $p$  est caractérisé par une fonction de modulation  $F_p$ , dont les angles de début et de fin ( $a_i$  et  $b_i$ ) sont donnés dans le Tableau 5-4. L'expression de  $F_p$  est rappelée dans les équations suivantes :

$$\forall k \in \mathbf{Q}_*^+ \quad F_p^k = \frac{j}{k * \pi} \cdot (e^{-j.k.b_i} - e^{-j.k.a_i}) \quad \text{Équation 5-48}$$

$$k = 0, \quad \phi \geq \theta \quad F_p^0 = \frac{b_i - a_i}{2\pi} \quad \text{Équation 5-49}$$

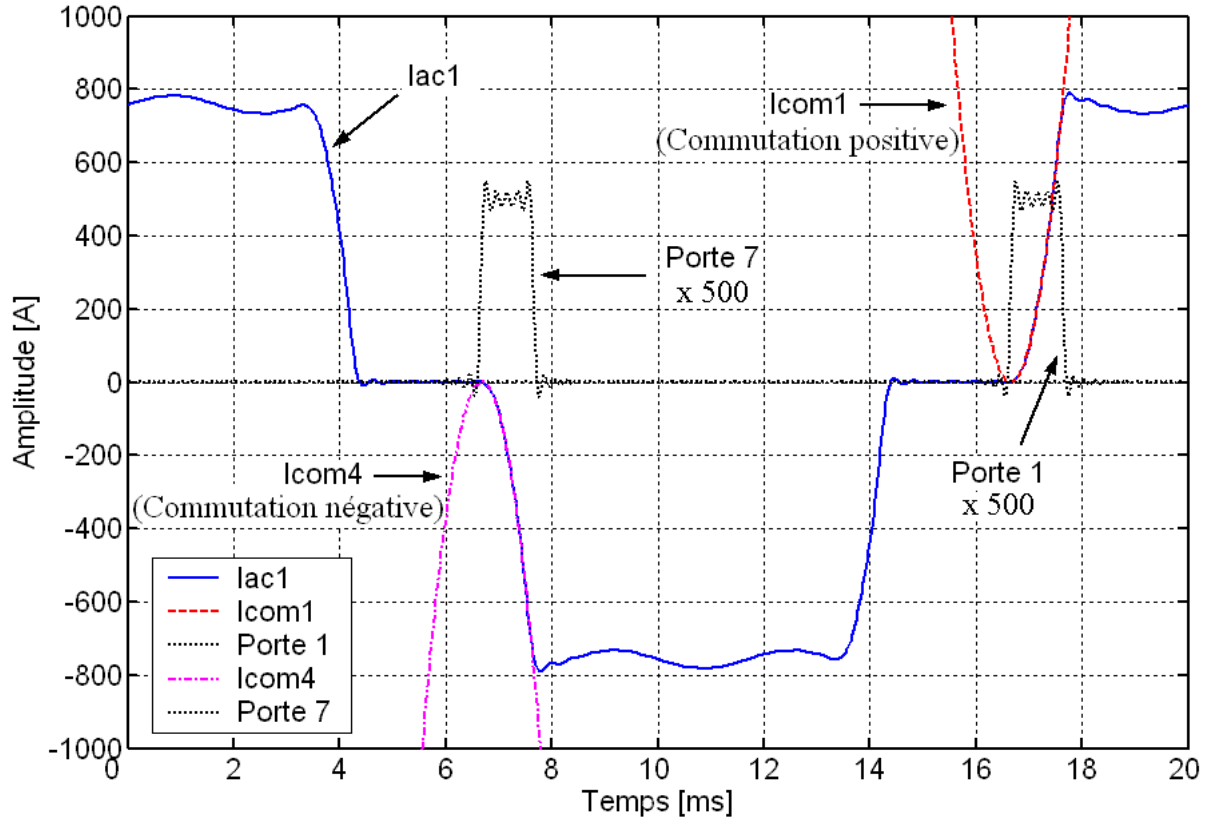
$$k = 0, \quad \phi < \theta \quad F_p^0 = \frac{b_i + 2.\pi - a_i}{2\pi} \quad \text{Équation 5-50}$$

- Courants de commutation :  $Icom_n^k$

Un courant de commutation est un courant de court-circuit entre deux des trois phases du côté alternatif. Six courants de commutation se développent pendant une période de fonctionnement du pont redresseur. La Figure 5-29 illustre l'allure de  $Icom_l$  (commutation positive) et  $Icom_4$  (commutation négative). Comme précédemment, nous noterons que les portes ont été multipliées par un gain de 500, afin de figurer avec les autres courbes dans la Figure 5-29.

L'indice  $n$  dénomme le numéro d'un courant de commutation :

$$Ic_n^k = \frac{j.k.X_b.Idc^k - (Vac_b^k - Vac_e^k)}{j.k.(X_b + X_e)} \quad \text{Équation 5-51}$$


 Figure 5-29 : Illustration des courants de commutation  $I_{com1}$  et  $I_{com4}$ 

Lorsqu'une phase d'empiètement s'initie (à l'instant  $\theta_n$ ), le courant de commutation dans la phase en question doit être nul. Ainsi, une condition initiale  $D_n$  doit être rajoutée :

$$I_{com_n}^k = I_c^k - D_n = I_c^k - \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} I_c^k \cdot e^{j.k.\theta_n} \right\} \quad \text{Équation 5-52}$$

Comme précédemment avec le pont monophasé, cette condition initiale  $D_n$  est une constante d'intégration obtenue en résolvant l'équation de circuit relative à l'empiètement  $n$ . Pour les courants de commutation  $I_{com1}$  et  $I_{com4}$ , les équations de circuit à résoudre sont :

$$Vac_1(t) - Vac_3(t) = L_1 \cdot \frac{dI_{dc}(t)}{dt} - (L_1 + L_3) \cdot \frac{dI_{com1}(t)}{dt} \quad \text{Équation 5-53}$$

$$Vac_1(t) - Vac_3(t) = -L_1 \cdot \frac{dI_{dc}(t)}{dt} - (L_1 + L_3) \cdot \frac{dI_{com4}(t)}{dt} \quad \text{Équation 5-54}$$

- Courants alternatifs :  $I_{ac1}$ ,  $I_{ac2}$ ,  $I_{ac3}$

Les courants de ligne  $I_{ac1}$ ,  $I_{ac2}$ ,  $I_{ac3}$  s'écrivent : [BATHURST-99]

$$\begin{aligned} I_{ac1} = & I_{dc} \otimes (F_2 + F_3 + F_4 + F_5 - F_8 - F_9 - F_{10} - F_{11}) + I_{com1} \otimes F_1 - \\ & I_{com3} \otimes F_5 + I_{com4} \otimes F_7 - I_{com6} \otimes F_{11} \end{aligned} \quad \text{Équation 5-55}$$

$$Iac_2 = Idc \otimes (F_6 + F_7 + F_8 + F_9 - F_{12} - F_1 - F_2 - F_3) - Icom_2 \otimes F_3 + Icom_3 \otimes F_5 - Icom_5 \otimes F_9 + Icom_6 \otimes F_{11}$$

Équation 5-56

$$Iac_3 = Idc \otimes (F_{10} + F_{11} + F_{12} + F_1 - F_4 - F_5 - F_6 - F_7) - Icom_1 \otimes F_1 + Icom_2 \otimes F_3 - Icom_4 \otimes F_7 + Icom_5 \otimes F_9$$

Équation 5-57

Comme aucun courant homopolaire ne peut exister dans cette configuration de circuit, on a aussi :  $Iac_3 = -Iac_1 - Iac_2$ .

L'ensemble des équations permettant de formuler les fonctions Erreur ont été établies. Ces fonctions assurent la cohérence de la solution :

$$F_{Vac_i} = Yt_i.(Vs_i - Vac_i) - Iac_i \quad \text{avec} \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{et} \quad Yt_i = 1/R_i$$

Équation 5-58

$$F_{Idc} = Vdc - Zf.(Idc - Is)$$

Équation 5-59

$$F_{\theta_n} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} (Vdc_{2,n-1}^k - Vdc_{2,n}^k) e^{j.k.\theta_n} \right\}$$

Équation 5-60

$$F_{\phi_n} = Idc^0 - \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} Ic_n^k e^{j.k.\theta_n} \right\} + \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} (Idc^k - Ic_n^k) e^{j.k.\phi_n} \right\}$$

Équation 5-61

Les Équation 5-58 et Équation 5-59 sont obtenues simplement à partir des lois de Kirchhoff. D'un point de vue physique, chaque angle  $\theta_n$  est obtenu à l'instant où la tension du bus  $DC$  lors d'un empiètement est égale à celle de la conduction normale lui succédant. De la même manière, chaque angle  $\phi_n$  est déterminé au moment où le courant de commutation  $Icom_n$  atteint le courant  $Idc$  du bus  $DC$ .

La démarche de résolution est identique à celle développée pour le pont redresseur monophasé. Les inconnues du problème et les fonctions erreur sont regroupées dans des vecteurs  $X$  et  $f(X)$ . Lorsque la norme de  $f(X)$  est nulle, le vecteur  $X$  est la solution du problème. Si cette norme est supérieure à un seuil  $\varepsilon$  fixé par l'utilisateur, il est nécessaire de recalculer  $X$ . Pour ce faire, un processus de résolution itératif de Newton est alors amorcé.

### 5.3.2. Définition de la taille du système, initialisation des inconnues

Deux algorithmes peuvent être présentés pour illustrer les deux premières étapes du logiciel d'estimation spectrale développé. Le premier – Figure 5-30 – illustre le principe de calcul de la taille du système. Le second – Figure 5-31 – schématise le principe d'initialisation des inconnues :

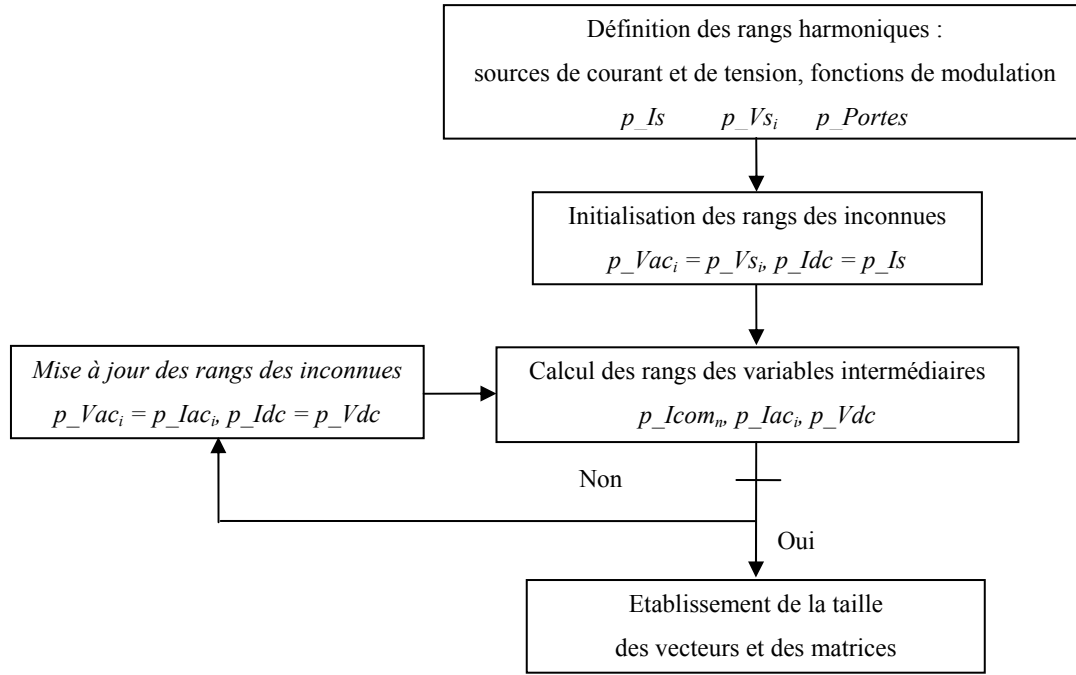
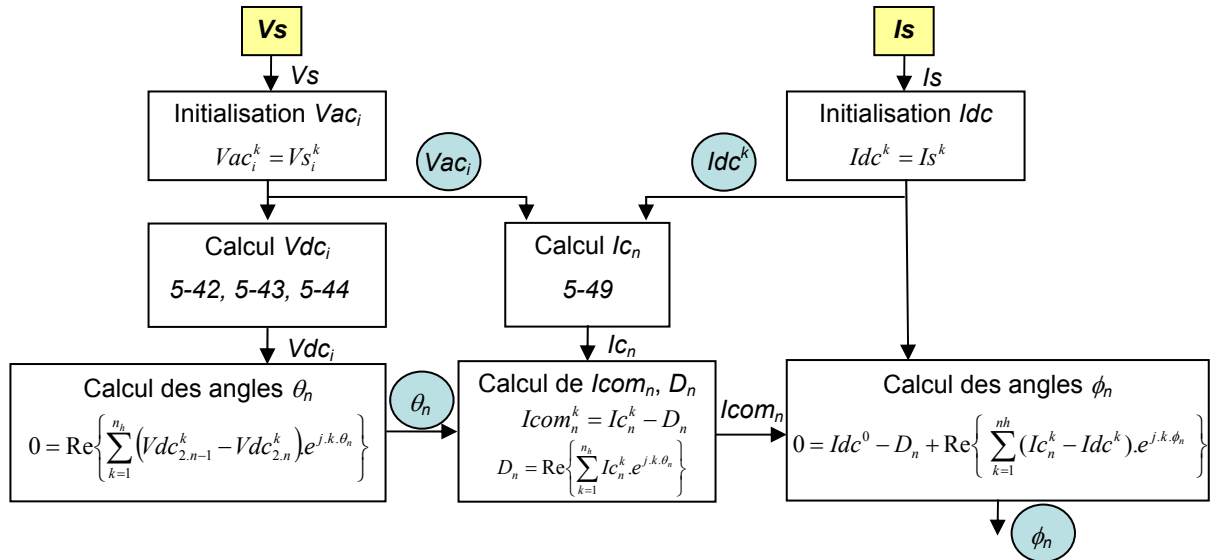


Figure 5-30 : Principe de calcul de la taille du système

Les commentaires de cette figure sont identiques à ceux apportés pour la Figure 5-9. Tant que les rangs harmoniques des inconnues  $p\_Vac_i$  et  $p\_Idc$  sont différents de ceux calculés pour les variables  $p\_Iac_i$  et  $p\_Idc$ , le système est rebouclé : les rangs harmoniques des inconnues sont remis à jour.


 Figure 5-31 : Principe d'initialisation des inconnues  $Vac_i$ ,  $Idc$ ,  $\theta_n$  et  $\phi_n$ 

Le principe d'initialisation des inconnues suit également la même logique que celle développée dans le paragraphe 5.2.3.2. A partir de l'initialisation des tensions  $Vac_i$  et du courant  $Idc$ , les angles de conduction des diodes sont calculés à partir des équations du circuit.

### 5.3.3. Résolution fréquentielle itérative

Si la norme du vecteur des fonctions Erreur est supérieure au seuil  $\varepsilon$ , une matrice jacobienne est calculée analytiquement. L'ensemble des dérivées partielles est donnée dans l'Annexe VI.

$$\begin{bmatrix} F_{Vac_1} \\ F_{Vac_2} \\ F_{Vac_3} \\ F_{Idc} \\ F_\theta \\ F_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial Vac_1} & \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial Vac_2} & \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial Vac_3} & \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{Vac_2}}{\partial Vac_1} & \frac{\partial F_{Vac_2}}{\partial Vac_2} & \frac{\partial F_{Vac_2}}{\partial Vac_3} & \frac{\partial F_{Vac_2}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{Vac_2}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{Vac_2}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{Vac_3}}{\partial Vac_1} & \frac{\partial F_{Vac_3}}{\partial Vac_2} & \frac{\partial F_{Vac_3}}{\partial Vac_3} & \frac{\partial F_{Vac_3}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{Vac_3}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{Vac_3}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Vac_1} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Vac_2} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Vac_3} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_\theta}{\partial Vac_1} & \frac{\partial F_\theta}{\partial Vac_2} & \frac{\partial F_\theta}{\partial Vac_3} & \frac{\partial F_\theta}{\partial Idc} & \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_\phi}{\partial Vac_1} & \frac{\partial F_\phi}{\partial Vac_2} & \frac{\partial F_\phi}{\partial Vac_3} & \frac{\partial F_\phi}{\partial Idc} & \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta} & \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Vac_1 \\ Vac_2 \\ Vac_3 \\ Idc \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \quad \text{Équation 5-62}$$

A titre d'illustration, la matrice jacobienne  $J_n$  obtenue lors de la première itération du problème est donnée dans les Figure 5-32 et Figure 5-33 (zoom et amplitudes bornées à une amplitude de 100). Cette matrice  $J_n$  est une matrice carrée, de taille 100x100, car le rang harmonique a été fixé à 10 et aucun interharmonique n'apparaît avec les fréquences des sources de tension et de courant retenues pour cette étude. Par souci de lisibilité, toutes les dérivées partielles ne sont pas nommées sur ces figures.

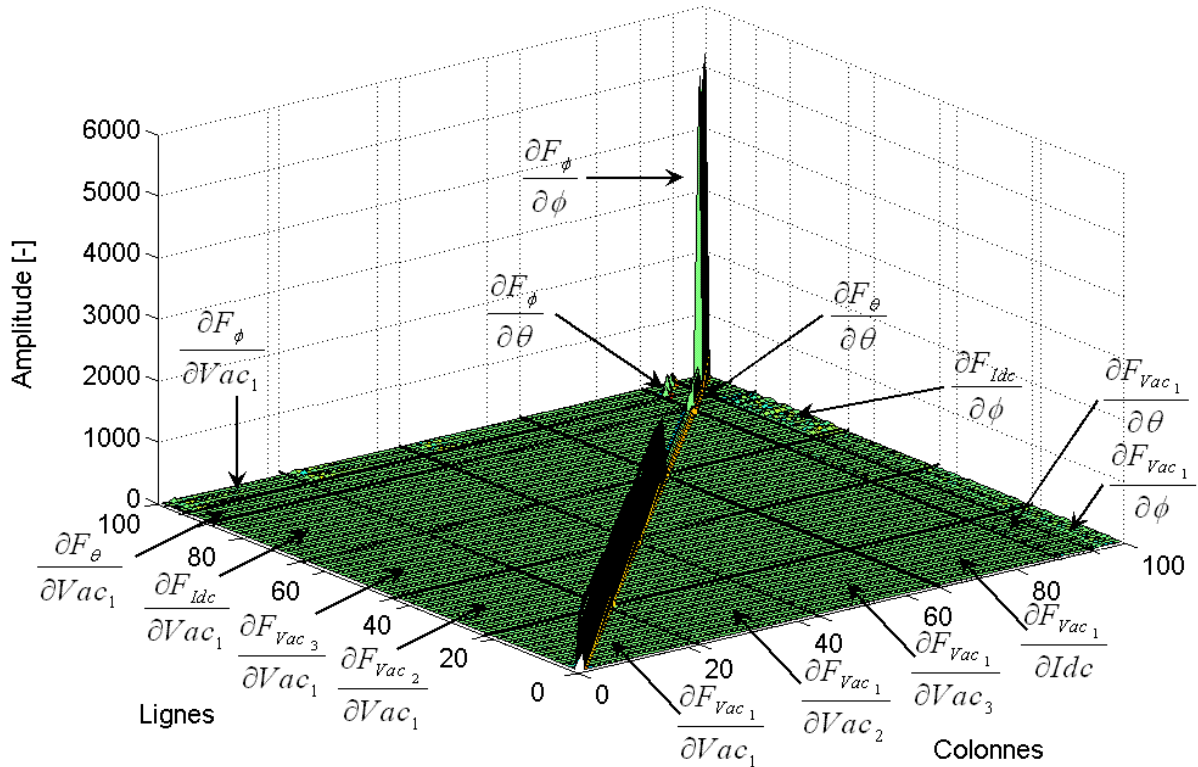


Figure 5-32 : Matrice jacobienne du pont redresseur triphasé

Comme nous pouvons le remarquer sur la vue générale de la jacobienne – Figure 5-32 – les termes les plus sensibles correspondent aux dérivées des fonctions erreur par rapport aux angles  $\theta$  et  $\phi$ . La diagonale de la matrice  $\mathbf{J}_n$  est également remarquable. Son amplitude est supérieure à celle observée lors de l'étude du pont redresseur monophasé. L'origine du phénomène vient de la valeur des résistances de ligne retenues pour la simulation. Ces dernières sont inférieures à celles utilisées dans le pont redresseur monophasé ( $R_i = 1 \text{ m}\Omega$  dans le pont triphasé, contre  $R = 0,1 \Omega$  dans le pont monophasé). Les admittances de ligne  $Y_{t_i}$  sont ainsi naturellement plus grandes dans le cas du pont triphasé. Une question se pose cependant puisque le raisonnement scientifique et les résultats mathématiques ne suivent pas la même tendance. En effet, physiquement, nous comprenons facilement que l'augmentation des résistances de ligne est à l'origine de chutes de tension harmoniques plus importantes. Néanmoins, mathématiquement, plus ces résistances augmentent, moins les raies diagonales sont prononcées. Nous manquons probablement de recul pour expliquer ce phénomène.

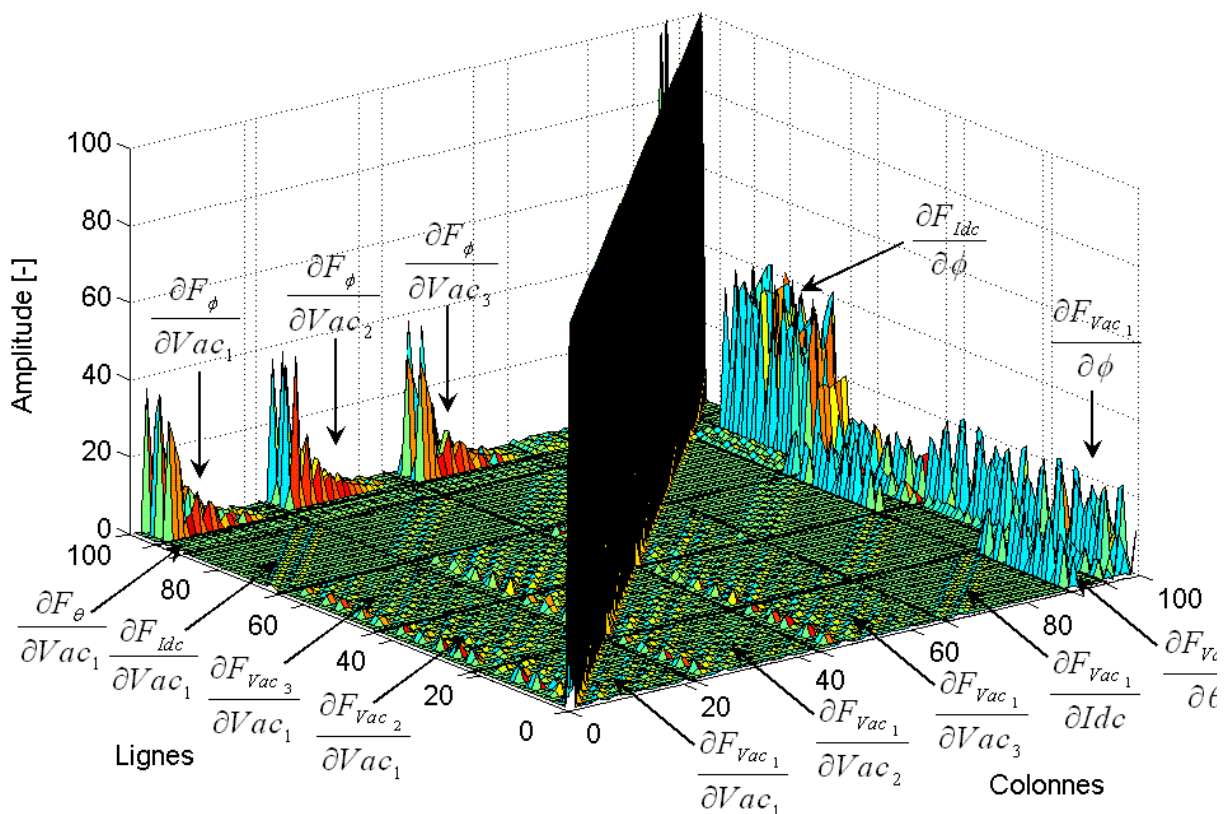


Figure 5-33 : Matrice jacobienne du pont redresseur triphasé, vue zoomée



### 5.3.4. Validation

La simulation dans le régime temporel (avec le logiciel SABER®) du pont redresseur triphasé suivie d'une estimation spectrale par *FFT* va nous permettre de comparer les résultats avec ceux obtenus par notre méthode sous MATLAB®. La *FFT* pourra ici être effectuée sur une période de 20 ms (en régime établi) puisque la fréquence de 50 Hz représente le plus grand multiple commun des fréquences des inconnues du système (La fréquence de 300 Hz de la source de courant  $I_s$  est un multiple entier du fondamental à 50 Hz). Les Figure 5-34 et Figure 5-35 donnent les erreurs, en valeurs absolues, du module des spectres de  $V_{ac1}$  et de  $I_{dc}$  :

$$Erreur_{Signal}^k = \left| Module_{Signal\ MATLAB}^k - Module_{Signal\ SABER}^k \right| \quad \text{Équation 5-63}$$

La précision des résultats obtenus est très satisfaisante, car elle est inférieure à 0,1 %. Comme précédemment, le seuil de sensibilité  $\varepsilon$  a été fixé à  $10^{-3}$ . La précision des résultats obtenus est directement dépendante du seuil fixé par l'utilisateur.

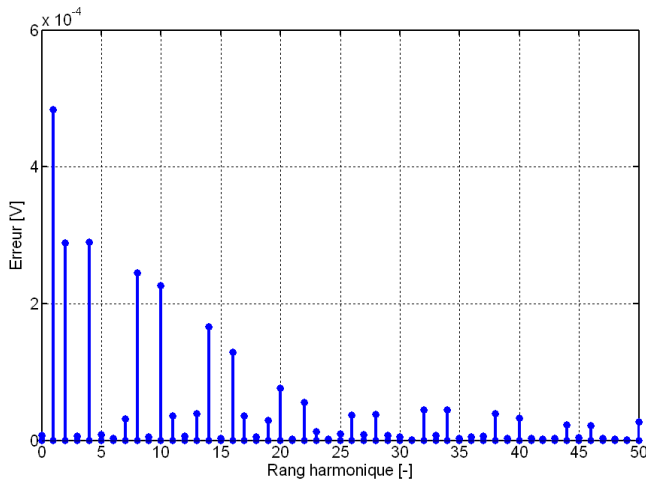


Figure 5-34 : Erreur sur le spectre de  $V_{ac1}$   
(fondamental = 480 V)

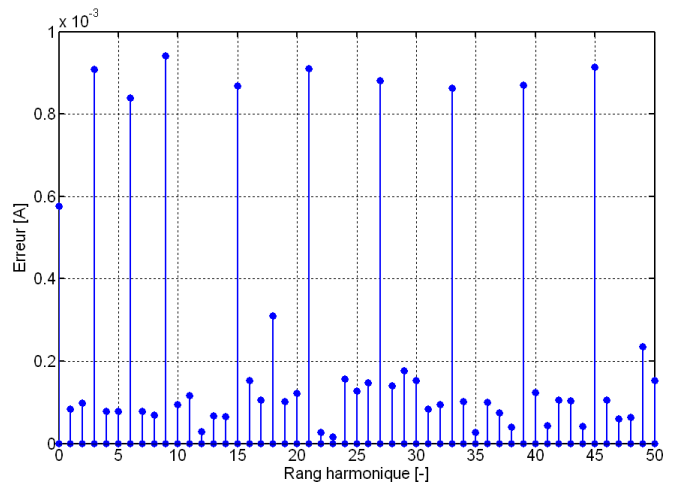


Figure 5-35 : Erreur sur le spectre de  $I_{dc}$   
(fondamental = 750 A)

### 5.3.5. Influence de l'empiètement sur les spectres

Comme nous l'avons étudié, la modélisation du pont redresseur triphasé effectuée permet d'estimer précisément le spectre des variables du problème en tenant compte de l'empiètement. Ce régime de fonctionnement demande de connaître ou de déterminer les angles de conduction des diodes, comme nous l'avons démontré dans la procédure de résolution. Les Figure 5-36 et Figure 5-37 donnent les évolutions des spectres de  $I_{ac1}$  pour deux valeurs d'inductance de ligne ( $L = 80 \mu\text{H}$  et  $L = 40 \mu\text{H}$ ). Ces résultats ont été obtenus avec l'outil de simulation fréquentiel sous MATLAB® en 1 min, et peuvent être vérifiés dans un laps de temps semblable avec le logiciel SABER®.



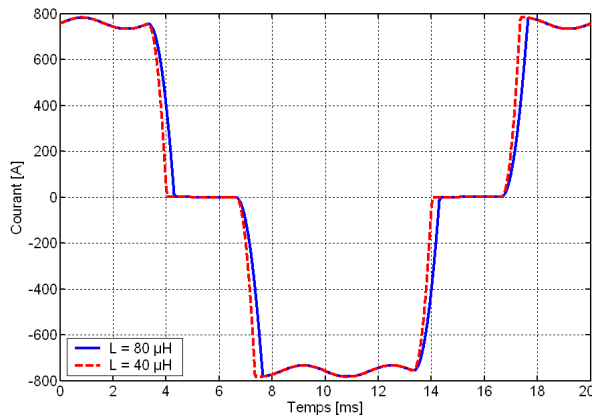


Figure 5-36 : Allures temporelles des courants  $I_{ac1}$

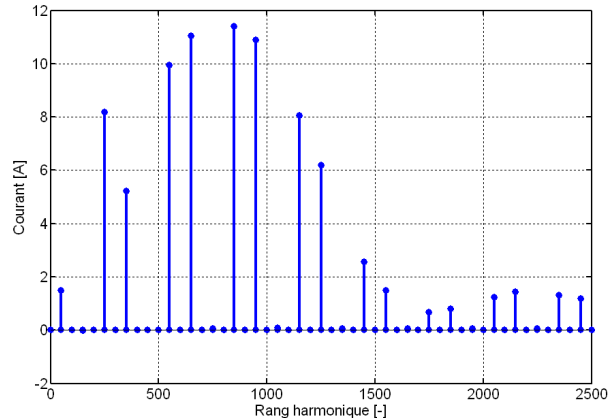


Figure 5-37 : Différence spectrale entre les courants  $I_{ac1}$  (Fondamental = 750 A)

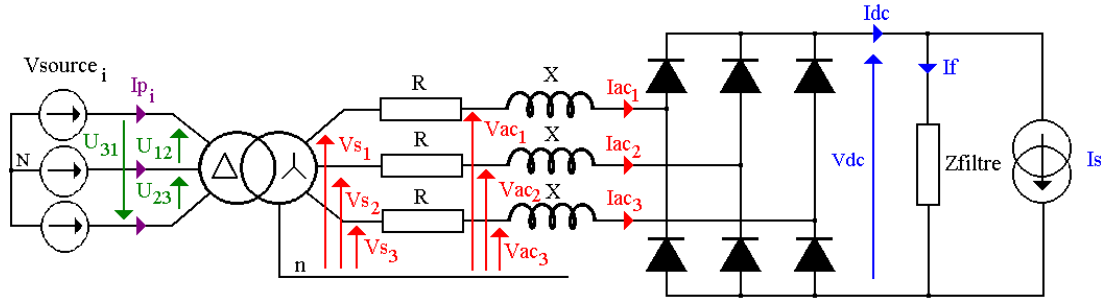
Lorsque la valeur de l'inductance de ligne augmente, la durée des phases d'empiètement se rallonge, cf. Figure 5-36. Dans le domaine fréquentiel, les différences entre les deux signaux sont nettes. La Figure 5-37 illustre la différence spectrale, calculée telle que :

$$\text{Différence spectrale} = \text{Spectre}_{I_{ac1} L = 40 \mu H} - \text{Spectre}_{I_{ac1} L = 80 \mu H} \quad \text{Équation 5-64}$$

La Figure 5-37 ne donnant que des raies d'amplitude positive, nous pouvons en déduire qu'une durée d'empiètement plus faible augmente les amplitudes des raies des courants de ligne  $I_{ac1}$ . Ce résultat est logique puisque une diminution du temps d'empiètement raidit les fronts des transitions. Les spectres générés n'en sont ainsi que plus importants. En tout état de cause, pour nos cas d'étude, la précision dans les estimations spectrales réalisées est de première importance. La prise en compte des phases d'empiètement des ponts redresseurs, bien qu'elle s'avère complexe à mettre en œuvre, est nécessaire pour déterminer exactement les spectres des variables du problème.

#### 5.4. Réseaux simples d'étude

Maintenant que le pont redresseur triphasé a été modélisé, l'estimation spectrale de circuits électriques plus complexes peut être envisagée. Nous présenterons dans ce paragraphe deux applications. Tout d'abord, nous tâcherons d'associer un transformateur  $Dy_n$  au pont redresseur triphasé. Les principales conséquences de cette association seront détaillées. Ensuite, nous analyserons le principe de l'association parallèle de deux ponts redresseurs monophasés. Pour ces deux cas d'étude, seuls les aspects mathématiques et méthodologiques seront développés car les résultats ne sont pas encore disponibles.

5.4.1. Association d'un transformateur  $Dy_n$  au pont redresseur triphasé

 Figure 5-38 : Association d'un transformateur  $Dy_n$  au pont redresseur triphasé

La Figure 5-38 présente le schéma du circuit étudié. A partir des travaux de modélisation du transformateur triphasé – paragraphe 3.3 – nous avons établi des matrices de transfert, caractérisant les couplages entre les divers enroulements. En particulier, l'Équation 3-20 permettait d'exprimer les courants  $I_p$  du primaire et les tensions simples  $V_s$  du secondaire, en fonction des courants  $I_s$  du secondaire et des tensions composées  $U_p$  du primaire :

$$\begin{bmatrix} I_p \\ V_s \end{bmatrix} = Z_{TR-Dyn} \cdot \begin{bmatrix} I_s \\ U_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -A^{-1}.B & A^{-1} \\ D-C.A^{-1}.B & C.A^{-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_s \\ U_p \end{bmatrix} \quad \text{Équation 5-65}$$

avec :

$$I_p = \begin{bmatrix} I_{p1} \\ I_{p2} \\ I_{p3} \end{bmatrix} \quad V_s = \begin{bmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \\ V_{s3} \end{bmatrix} \quad I_s = \begin{bmatrix} -I_{ac1} \\ -I_{ac2} \\ -I_{ac3} \end{bmatrix} \quad U_p = \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{23} \\ U_{31} \end{bmatrix}$$

Les équations caractéristiques du pont redresseur triphasé ne sont pas modifiées. Seules les valeurs des anciennes sources de tension  $V_{s1}$ ,  $V_{s2}$ ,  $V_{s3}$  sont changées. Dans le cas de l'association du transformateur  $Dy_n$  au pont redresseur triphasé, on a :

$$\begin{bmatrix} V_{s1} \\ V_{s2} \\ V_{s3} \end{bmatrix} = [D-C.A^{-1}.B] \cdot \begin{bmatrix} -I_{ac1} \\ -I_{ac2} \\ -I_{ac3} \end{bmatrix} + [C.A^{-1}] \cdot \begin{bmatrix} U_{12} \\ U_{23} \\ U_{31} \end{bmatrix} \quad \text{Équation 5-66}$$

Nous rappelons que les matrices  $[D-C.A^{-1}.B]$  et  $[C.A^{-1}]$  sont des matrices carrées, de taille 3x3, cf. Équation II-7 de l'Annexe II. Par souci de clarté, nous noterons :

$$[D-C.A^{-1}.B] = \begin{bmatrix} t_1 & t_2 & t_3 \\ t_4 & t_5 & t_6 \\ t_7 & t_8 & t_9 \end{bmatrix} \quad [C.A^{-1}] = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_4 & r_5 & r_6 \\ r_7 & r_8 & r_9 \end{bmatrix} \quad \text{Équation 5-67}$$

L'Équation 5-66 nous indique que chaque tension simple du secondaire du transformateur  $V_{si}$  dépend des courants des trois phases  $I_{ac1}$ ,  $I_{ac2}$  et  $I_{ac3}$  (et des tensions composées du primaire). Bien que les

équations du pont redresseur triphasé ne changent pas par rapport à celles présentées dans le paragraphe 5.3, il est important de considérer les tensions  $V_{S_i}$  comme des fonctions dépendant des variables  $I_{ac_i}$ . Bien entendu, l'intégration du transformateur dans le schéma du pont redresseur triphasé complexifie les écritures des équations de la matrice jacobienne. Les dérivations des fonctions erreur  $F_{Vac_i}$  sont en effet particulièrement affectées car le transformateur couple les phases. En d'autres termes, chacune des fonctions erreur  $F_{Vac_i}$  n'est plus uniquement dépendante du courant  $I_{ac_i}$ , mais de tous les courants  $I_{ac_1}$ ,  $I_{ac_2}$  et  $I_{ac_3}$ . A titre d'exemple, la première dérivée partielle sera traitée :

$$\frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial Vac_1} = Yt.(V_{S_1} - Vac_1) - I_{ac_1} \quad \text{avec} \quad Yt = \frac{1}{R} \quad \text{Équation 5-68}$$

avec :

$$V_{S_1} = -(t_1.I_{ac_1} + t_2.I_{ac_2} + t_3.I_{ac_3}) + r_1.U_{12} + r_2.U_{23} + r_3.U_{31} \quad \text{Équation 5-69}$$

d'où :

$$\frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial Vac_1} = -Yt - (1 + Yt.t_1) \cdot \frac{\partial I_{ac_1}}{\partial Vac_1} - Yt.t_2 \cdot \frac{\partial I_{ac_2}}{\partial Vac_1} - Yt.t_3 \cdot \frac{\partial I_{ac_3}}{\partial Vac_1} \quad \text{Équation 5-70}$$

A la différence du cas d'étude du pont redresseur triphasé, plusieurs termes additionnels caractérisent l'intégration du transformateur dans le circuit, et ne doivent pas être omis lors des dérivations.

#### 5.4.2. Association en parallèle de ponts redresseurs monophasés

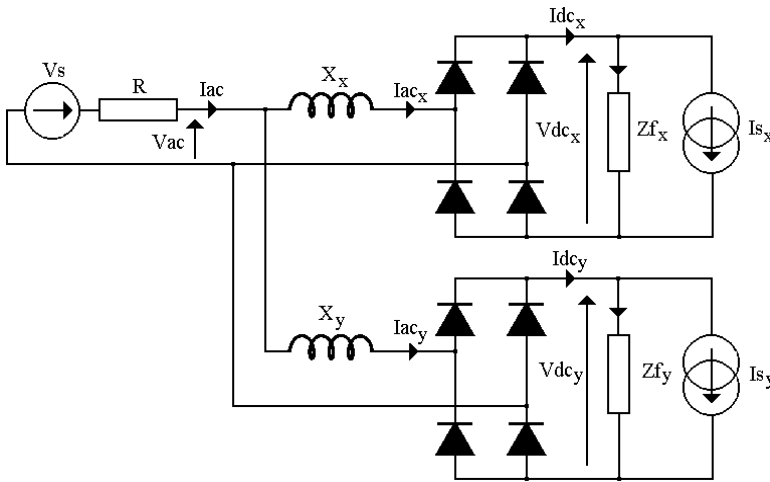


Figure 5-39 : Association en parallèle de deux redresseurs monophasés

La Figure 5-39 donne le schéma du circuit étudié. Deux ponts redresseurs monophasés sont connectés en parallèle après une résistance  $R$  commune. Les inconnues du problème et les équations caractérisant le fonctionnement de chaque pont redresseur monophasé sont identiques à celles développées dans le paragraphe 5.2. Les fonctions erreurs du problème sont listées dans les expressions suivantes :

- Fonction erreur sur la tension  $Vac$  :

$$F_{Vac^k} = Yt.(V_{S^k} - Vac^k) - I_{ac^k} \quad \text{avec} \quad Yt = \frac{1}{R} \quad \text{et} \quad I_{ac^k} = I_{ac_x^k} + I_{ac_y^k} \quad \text{Équation 5-71}$$

- Fonctions erreur sur les courants  $Idc$  :

$$F_{Idc_x^k} = Vdc_x^k - Zf.(Idc_x^k - Is_x^k) \quad \text{Équation 5-72}$$

$$F_{Idc_y^k} = Vdc_y^k - Zf.(Idc_y^k - Is_y^k) \quad \text{Équation 5-73}$$

avec  $Vdc_i = (F_1 - F_3) \otimes (Vac^k - j.k.X_i.Idc_i^k)$ . Comme nous le constatons avec les équations, l'inconnue  $Vac$  se manifeste distinctement dans les deux fonctions erreur  $F_{Idc}$ .

- Fonctions erreur sur les angles  $\theta$  :

$$F_{\theta_x} = -\text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} (Vac^k - j.k.X_x.Idc_x^k) e^{j.k.\theta_x} \right\} \quad \text{Équation 5-74}$$

$$F_{\theta_y} = -\text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} (Vac^k - j.k.X_y.Idc_y^k) e^{j.k.\theta_y} \right\} \quad \text{Équation 5-75}$$

La même remarque que précédemment peut être formulée pour la présence de  $Vac$  dans ces deux fonctions erreur.

- Fonctions erreur pour les angles  $\phi$  :

$$F_{\phi_x} = Idc_x^0 - (D_{x_2} - E_{x_2}) + \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} (Ic_x^k - Idc_x^k) e^{j.k.\phi_x} \right\} \quad \text{Équation 5-76}$$

$$F_{\phi_y} = Idc_y^0 - (D_{y_2} - E_{y_2}) + \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} (Ic_y^k - Idc_y^k) e^{j.k.\phi_y} \right\} \quad \text{Équation 5-77}$$

avec  $Ic_i^k = \frac{Vac^k}{j.k.X_i}$  et :

$$D_{i_2} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} Ic_i^k . e^{j.k.\theta_i} \right\} \quad \text{Équation 5-78}$$

$$E_{i_2} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} Idc_i^k . e^{j.k.\theta_i} \right\} \quad \text{Équation 5-79}$$

Les inconnues  $Vac$ ,  $Idc_x$ ,  $Idc_y$ ,  $\theta_x$ ,  $\theta_y$ ,  $\phi_x$ ,  $\phi_y$  étant indépendantes les unes par rapport aux autres, de nombreux termes de la matrice jacobienne sont nuls, cf Équation 5-80. Bien que le système soit plus complexe par rapport à un simple pont redresseur monophasé, sa résolution reste relativement simple, du fait de la structure de la jacobienne.

$$\begin{bmatrix} F_{Vac} \\ F_{Idc_x} \\ F_{Idc_y} \\ F_{\theta_x} \\ F_{\phi_x} \\ F_{\theta_y} \\ F_{\phi_y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{Vac}}{\partial Vac} & \frac{\partial F_{Vac}}{\partial Idc_x} & \frac{\partial F_{Vac}}{\partial Idc_y} & \frac{\partial F_{Vac}}{\partial \theta_x} & \frac{\partial F_{Vac}}{\partial \phi_x} & \frac{\partial F_{Vac}}{\partial \theta_y} & \frac{\partial F_{Vac}}{\partial \phi_y} \\ \frac{\partial F_{Idc_x}}{\partial Vac} & \frac{\partial F_{Idc_x}}{\partial Idc_x} & 0 & \frac{\partial F_{Idc_x}}{\partial \theta_x} & \frac{\partial F_{Idc_x}}{\partial \phi_x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_{Idc_y}}{\partial Vac} & 0 & \frac{\partial F_{Idc_y}}{\partial Idc_y} & 0 & 0 & \frac{\partial F_{Idc_y}}{\partial \theta_y} & \frac{\partial F_{Idc_y}}{\partial \phi_y} \\ \frac{\partial F_{\theta_x}}{\partial Vac} & \frac{\partial F_{\theta_x}}{\partial Idc_x} & 0 & \frac{\partial F_{\theta_x}}{\partial \theta_x} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_{\phi_x}}{\partial Vac} & \frac{\partial F_{\phi_x}}{\partial Idc_x} & 0 & \frac{\partial F_{\phi_x}}{\partial \theta_x} & \frac{\partial F_{\phi_x}}{\partial \phi_x} & 0 & 0 \\ \frac{\partial F_{\theta_y}}{\partial Vac} & 0 & \frac{\partial F_{\theta_y}}{\partial Idc_y} & 0 & 0 & \frac{\partial F_{\theta_y}}{\partial \theta_y} & 0 \\ \frac{\partial F_{\phi_y}}{\partial Vac} & 0 & \frac{\partial F_{\phi_y}}{\partial Idc_y} & 0 & 0 & \frac{\partial F_{\phi_y}}{\partial \theta_y} & \frac{\partial F_{\phi_y}}{\partial \phi_y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Vac \\ Idc_x \\ Idc_y \\ \theta_x \\ \phi_x \\ \theta_y \\ \phi_y \end{bmatrix} \quad \text{Équation 5-80}$$

## 5.5. Bilan des analyses fréquentielles

### 5.5.1. Validité et performance

Deux ponts redresseurs monophasé et triphasé ont été développés et simulés. Les estimations spectrales obtenues ont été comparées à celles recueillies après une *FFT* sous le logiciel SABER. Les résultats obtenus sont très satisfaisants (erreur inférieure à 0,1 %). Comme nous l'avons mentionné, la précision de l'estimation spectrale effectuée avec notre outil d'analyse fréquentielle dépend directement du seuil  $\varepsilon$  fixé par l'utilisateur. Lorsque la norme du vecteur erreur  $f(X_n)$  est inférieure à ce seuil, la solution  $X_n$  du problème est obtenue. Plus  $\varepsilon$  est petit plus l'estimation spectrale des variables est précise. N'oublions pas cependant le caractère itératif du processus de résolution. Chaque itération est synonyme de nouveaux calculs ; une meilleure précision se paye alors en terme de temps de calcul. Pour quantifier ces propos, dans le cas du pont redresseur triphasé, avec un rang harmonique maximum de 50 (limite d'étude fréquentielle à 2500 Hz), nous pouvons analyser le Tableau 5-5 :

$\varepsilon$	1	$1.10^{-2}$	$1.10^{-4}$	$1.10^{-6}$
<b>Nombre d'itérations [-]</b>	3	4	5	6
<b>Temps de calcul [s]</b>	43	64	90	110
<b>SABER : calcul temporel + FFT</b>	Environ 60 s			

Tableau 5-5 : Effets du seuil  $\varepsilon$  sur le temps de calcul

Les temps de calcul sont tous très acceptables, et très comparables à ceux de SABER. Cependant, de nombreuses techniques existent pour les diminuer. Certaines sont liées à la manière de programmer, d'autres découlent du type de langage utilisé. En tout état de cause, les performances offertes par

l'estimation spectrale présentée ne doivent pas uniquement être jugées en terme de temps de simulation. Un des avantages de cette technique d'estimation spectrale réside dans l'obtention directe des spectres en régime permanent. N'oublions pas que les méthodes temporelles simulent nécessairement les régimes transitoires avant d'arriver au régime permanent. Un deuxième avantage de la méthode d'estimation spectrale développée réside dans la traçabilité des harmoniques. En effet, grâce aux notations matricielles adoptées, couplant les harmoniques des différents signaux, il est possible de connaître l'origine de chaque raie harmonique. Ces aspects n'ont pas été développés dans le cadre de la thèse, mais ils sont présentés dans [IORDACHE-02].

#### ✓ Quelques pistes pour optimiser la programmation :

Le processus de résolution est un processus itératif. A l'heure actuelle, la matrice jacobienne est recalculée analytiquement à chaque itération. Cette opération représente une part importante du temps de calcul total (75 %). Il est important de rappeler que cette matrice a comme principal but de définir une tendance pour la convergence du système. Un algorithme plus complexe pourrait être développé afin d'éviter le calcul systématique de cette matrice à chaque itération.

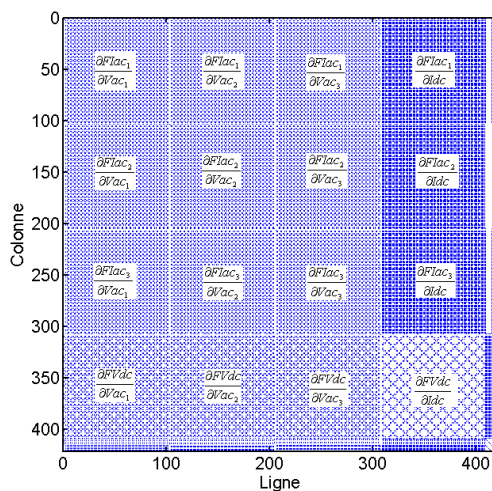


Figure 5-40 : Eléments non nuls ( $> 10^{-9}$ ) de la matrice jacobienne du pont redresseur triphasé (non colorés)

Par ailleurs, comme nous pouvons le constater sur la Figure 5-40, la jacobienne d'un système est souvent très creuse (nombre important de zéro). L'utilisation de techniques adaptées intégrant matrices et vecteurs creux réduirait pour une part le temps de calcul des opérations matricielles (car moins d'espace mémoire est alloué aux éléments).

#### ✓ Langage interprété, langage compilé ?

L'outil d'estimation spectrale a été développé sous le logiciel MATLAB®. Le langage utilisé est ainsi un langage qui va être interprété par MATLAB, à la différence d'un programme écrit en C, par exemple, qui doit être compilé avant d'être exécuté. Bien que MATLAB procure facilité et confort lors de la programmation des diverses fonctions, les temps de calcul qui en découlent sont beaucoup plus importants que si les programmes avaient été codés en C. Un cas de test avait été réalisé par Eduardo Mendes<sup>6</sup> lors de la thèse de Marius Iordache [IORDACHE-02] pour comparer les temps de calcul d'un

<sup>6</sup> Eduardo Mendes est enseignant chercheur au LCIS (EA 3747) à Valence. Il a encadré Marius Iordache lors de sa thèse [IORDACHE-02].

langage interprété sous MATLAB et d'un langage en C. L'expérience a montré une réduction du temps de calcul de trois heures initialement avec MATLAB, à quelques minutes en langage C.

Une autre alternative à la transcription des programmes en C, est récemment devenue possible avec les dernières versions de MATLAB dotées du compilateur *mcc*. Cette alternative consiste à compiler les fichiers MATLAB en fichiers *DLL* (Dynamic Link Library). Le gain de temps est alors significatif (facteur 10).

### 5.5.2. Perspectives

Les perspectives à court terme intègrent bien évidemment les points précédents concernant la quête de la diminution du temps de calcul. C'est un point très important, puisque le temps de calcul ne doit pas représenter un frein à l'étude de cas d'étude plus complexes. Les applications simples de la méthode d'estimation spectrale, présentés dans le paragraphe 5.4 sont aussi des points clefs pour le court terme. Dans la recherche de la complexification des circuits étudiés, les effets de couplage d'un pont redresseur vers le second et la prise en compte de la dissymétrie des enroulements du transformateur sont des éléments incontournables. L'expérience montre d'ailleurs souvent qu'il faut modéliser les systèmes électriques par ordre croissant de difficulté.

A plus long terme, le mariage des travaux de Marius Iordache avec ceux présentés dans ce document vont permettre d'intégrer les chaînes de traction avec les modèles de ligne et de sous-station développées. Nous nous rapprocherons ainsi de l'étude fréquentielle d'un réseau de tramway simple (doté de quelques sous-stations et tramways).

Comme nous l'avons précédemment évoqué, un des atouts de la méthode d'estimation spectrale itérative développée, par rapport à son concurrent temporel par exemple, réside dans la notion de traçabilité des harmoniques. Cet aspect n'a pas été développé dans ce travail, mais les possibilités offertes par cette spécificité semblent très intéressantes. En effet, dans l'optique de conception de systèmes électriques, la méthode fréquentielle développée permettrait de connaître l'origine de chaque harmonique. Il est ainsi possible d'imaginer des algorithmes de conception ou d'optimisation de structure basés sur cette méthode.





## *Conclusion et perspectives*



## **Conclusion et perspectives**

L'étude et la modélisation des réseaux électriques modernes à faible puissance de court-circuit (tels que les réseaux de voiture, d'avion, de navire ou de tramway) demandent d'adopter une démarche globale de type *système*. En effet, l'insertion de nombreuses structures d'électronique de puissance au sein de ces réseaux modifie fortement leur topologie et leur fonctionnement. Les méthodes de modélisation traditionnelles des réseaux électriques, basées leur étude statique, atteignent leur limite puisqu'elles ne permettent pas l'analyse exhaustive des problèmes dynamique ou harmonique rencontrés. La nécessité d'une démarche système est ainsi justifiée puisqu'une modélisation complète d'un réseau, ne peut être dissociée de l'étude de ses éléments constitutifs.

L'exemple du procédé d'alimentation par le sol d'ALSTOM (*ALISS*) est particulièrement représentatif, puisque son étude – via le cas de la Rochelle – a illustré le couplage d'approches héritées de la Compatibilité ElectroMagnétique (*CEM*) avec une modélisation de type circuit du réseau électrique. Les résultats obtenus nous ont permis de comparer son fonctionnement avec celui d'un réseau équipé d'une Ligne Aérienne de Contact (*LAC*), et de mettre en valeur le comportement capacitif d'*ALISS* sans pour autant le discriminer. L'étude du comportement dynamique du réseau nous a également mené à soulever le problème de l'arc électrique, lors de la transition du frotteur du tramway entre deux secteurs conducteurs.

Comme nous l'avons souligné, les convertisseurs statiques (redresseurs, onduleurs) font partie intégrante des réseaux électriques modernes. La prise en compte des phénomènes d'interaction harmonique est nécessaire afin de garantir fiabilité et disponibilité [MÖLLERSTEDT-00]. La méthode d'estimation spectrale que nous avons développée est ainsi en rupture avec les approches traditionnelles. Son choix a été motivé par la nécessité de disposer d'une méthode de modélisation précise dans le domaine des basses fréquences ( $< 25$  kHz). Les ponts redresseurs à commutation naturelle ont ainsi été caractérisés de manière exacte dans le domaine fréquentiel, en intégrant la possibilité d'effectuer une traçabilité des harmoniques.

Les travaux réalisés nous ont permis de contribuer à la modélisation des réseaux électriques modernes. La démarche système mise en avant nous a mené à proposer des méthodes de modélisation pour les lignes de transmission et à développer un outil d'analyse spectrale. A court terme, pour poursuivre l'axe de recherche, il semble important de :

- compléter la méthode d'estimation spectrale que nous avons développée. L'intégration des chaînes de traction [IORDACHE-02] aux modèles existants est une étape importante. Nous serons ainsi capable d'estimer les spectres – dans les basses fréquences – d'un réseau d'alimentation électrique simple, doté de quelques sous-stations et tramways ;

- compléter la compréhension de l'arc électrique pour la transition du frotteur entre les secteurs conducteurs. Une connaissance de la physique de l'arc et du comportement des matériaux lors des derniers instants de la phase de transition est nécessaire afin d'analyser les conséquences sur le système.

A plus long terme, les travaux seront orientés vers l'outil d'estimation spectrale développé. En effet, pour l'analyse des spectres dans le domaine des basses fréquences, cette méthode donne plusieurs avantages par rapport à ses concurrentes temporelles [DOMMEL-69] ou fréquentielles directes [POPESCU-99] [REVOL-03]. Tout d'abord, les spectres déterminés sont exacts et sont directement obtenus en régime permanent. Ensuite, la possibilité d'effectuer une traçabilité des harmoniques ouvre une porte à la conception et à l'optimisation des structures.

En tout état de cause, ces perspectives ne peuvent être atteintes sans intégrer la notion de *pluridisciplinarité* d'un problème. En effet, sur des problèmes complexes de type système, où de nombreuses connaissances sont requises dans des domaines variés, la synergie des compétences des spécialistes d'horizons différents (matériaux, informatique, génie électrique) sera déterminante pour le futur.

## *Annexes*

## *Table des matières des annexes :*

<b>Annexe I. Calcul du flux par le potentiel vecteur magnétique...</b>	<b>151</b>
Cas de conducteurs filiformes en magnétostatique .....	151
Considérations énergétiques.....	152
<b>Annexe II. Composantes matricielles des transformateurs.....</b>	<b>155</b>
Transformateur $Dy_n$ .....	155
Transformateur $Ddy_n$ .....	157
<b>Annexe III. Mesure des paramètres d'un transformateur.....</b>	<b>159</b>
Rappels théoriques : cas du transformateur à deux enroulements.....	159
Méthodologie pour un transformateur à neuf enroulements .....	161
Résultats des mesures effectuées .....	162
Principe de généralisation des résultats.....	164
<b>Annexe IV. Détermination d'une fréquence équivalente .....</b>	<b>167</b>
<b>Annexe V. Méthode de calcul numérique des harmoniques.....</b>	<b>169</b>
Transformation d'une grandeur par la modulation .....	169
Passage d'une notation complexe à une notation matricielle .....	170
<b>Annexe VI. Dérivées des termes de la jacobienne .....</b>	<b>173</b>
Pont redresseur monophasé .....	173
Pont redresseur triphasé .....	180

## **Annexe I. Calcul du flux par le potentiel vecteur magnétique**

Le logiciel Flux2D est capable de calculer le flux magnétique sur une bobine donnée. La formule de référence utilisée par Flux2D est donnée par l'Équation I-1 :

$$\phi_k = \Phi_0 - \Phi_k$$

$$\phi_k = \frac{D}{i_0} \iint_{\Omega_0} \vec{A} \cdot \vec{J}_0 \cdot d\Omega_0 - \frac{D}{i_k} \iint_{\Omega_k} \vec{A} \cdot \vec{J}_k \cdot d\Omega_k \quad \text{Équation I-1}$$

avec :

$D$	Profondeur d'étude du système [m]
$i_k$	Courant dans le conducteur k [A]
$\vec{A}$	Potentiel vecteur magnétique [Wb/m]
$\vec{J}_k$	Densité de courant du conducteur k [A/m <sup>2</sup> ]
$\Omega_0$	Surface du conducteur k [m <sup>2</sup> ]
$\Phi_k$	Fonction flux définie sur une surface 'k'. Cette grandeur ne représente pas en elle-même un flux magnétique.

Nous présenterons dans cette annexe deux démonstrations en magnétostatique afin d'expliquer la formule utilisée sous le logiciel Flux2D. Dans un premier temps, nous étudierons le cas particulier de deux conducteurs filiformes où la démonstration est très simple. Nous nous pencherons ensuite sur une problématique plus générale, en abordant des aspects énergétiques.

### **Cas de conducteurs filiformes en magnétostatique**

Considérons donc deux conducteurs filiformes de longueur  $L$ , définis de  $A$  à  $B$  et de  $C$  à  $D$  sur la Figure I-1. Lors de la circulation d'un courant dans ces conducteurs, le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  engendré est normal au plan de la figure.  $\vec{A}$  ne possède ainsi qu'une seule composante suivant l'axe  $z$ .

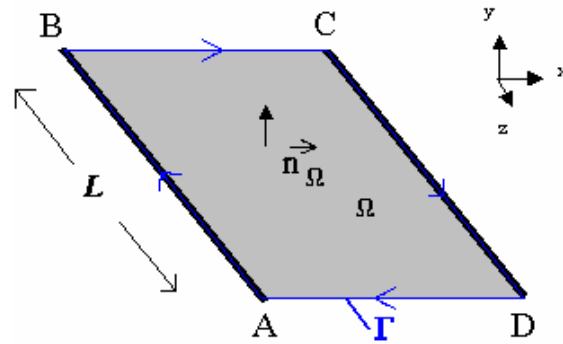


Figure I-1 : Cas de deux conducteurs filiformes

Le flux magnétique sur la surface  $\Omega$  s'écrit :

$$\phi_{\Omega} = \iint_{\Omega} \vec{B} \cdot \vec{n}_{\Omega} \cdot d\Omega \quad \text{Équation I-2}$$

$$\phi_{\Omega} = \iint_{\Omega} \text{Rot} \vec{A} \cdot \vec{n}_{\Omega} \cdot d\Omega = \oint_{\Gamma} \vec{A} \cdot d\vec{l}_{\Gamma} \quad \text{Équation I-3}$$

(Théorème de Stokes Ampère)

Ainsi, le calcul du flux sur la surface  $\Omega$  revient à intégrer le potentiel vecteur magnétique  $\vec{A}$  sur le contour  $\Gamma$  :

$$\phi_{\Omega} = \oint_{AB} \vec{A} \cdot d\vec{l}_{\Gamma} + \oint_{BC} \vec{A} \cdot d\vec{l}_{\Gamma} + \oint_{CD} \vec{A} \cdot d\vec{l}_{\Gamma} + \oint_{DA} \vec{A} \cdot d\vec{l}_{\Gamma} \quad \text{Équation I-4}$$

$$\phi_{\Omega} = A_B \cdot L + 0 - A_C \cdot L + 0$$

$$\phi_{\Omega} = L(A_B - A_C) \quad \text{Équation I-5}$$

avec  $A_B$  Potentiel vecteur magnétique en B  
 $A_C$  Potentiel vecteur magnétique en C

La formule obtenue pour le flux de la bobine composée de deux conducteurs filiformes est analogue à la formule utilisée sous Flux2D dans le cas général. La différence réside dans le fait que la répartition des courants est prise en compte dans le cas général. Si l'on reprend la formule utilisée sous Flux2D, une simplification peut s'opérer au niveau de la densité de courant de la surface et du courant circulant dans le conducteur.

### Considérations énergétiques

Le cas des conducteurs filiformes est un cas particulier, où la répartition des courants dans le conducteur ne dépend pas de la géométrie. Il est ainsi difficile d'utiliser la même démarche que



précédemment pour démontrer la formule utilisée sous Flux2D. Pour palier ce problème, l'approche énergétique est une solution judicieuse.

La co-énergie magnétique d'un système s'écrit telle que :

$$W' = L \iint_{\Omega} \left( \int_0^{\vec{H}} \vec{B} \cdot d\vec{h} \right) d\Omega \quad \text{Équation I-6}$$

Si l'on considère que les matériaux magnétiques utilisés ne sont pas saturés, la co-énergie magnétique et l'énergie magnétique sont identiques. Par ailleurs, le flux d'une bobine  $k$  peut être obtenu en dérivant la co-énergie magnétique par le courant circulant dans cette même bobine :

$$\phi_k = \frac{dW'}{dI_k} = L \iint_{\Omega_k} \frac{\partial}{\partial I_k} \left( \int_0^{\vec{H}} \vec{B} \cdot d\vec{h} \right) d\Omega \quad \text{Équation I-7}$$

d'où :

$$\phi_k = L \iint_{\Omega_k} \vec{B}(\vec{H}) \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial I_k} d\Omega \quad \text{Équation I-8}$$

Or, on magnétostatique, on a :  $\vec{Rot} \cdot \vec{H} = \vec{J}$  et  $\vec{Rot} \cdot \vec{A} = \vec{B}$ , ainsi :

$$\phi_k = L \iint_{\Omega_k} \vec{Rot} \cdot \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial I_k} d\Omega = L \iint_{\Omega_k} \vec{A} \cdot \frac{\partial}{\partial I_k} (\vec{Rot} \cdot \vec{H}) d\Omega + \oint_{\Gamma_k} (\vec{A} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} \cdot dl \quad \text{Équation I-9}$$

Comme  $\oint_{\Gamma_k} (\vec{A} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{n} \cdot dl = 0$ , on a :

$$\phi_k = L \iint_{\Omega_k} \vec{A} \cdot \frac{\partial \vec{J}}{\partial I_k} d\Omega \quad \text{Équation I-10}$$

Avec  $\frac{\partial \vec{J}}{\partial I_k} = \frac{\vec{J}_k}{I_k}$ , où  $\vec{J}_k$  est la densité de courant dans le conducteur  $k$ , on a :

$$\phi_k = \frac{L}{I_k} \iint_{\Omega_k} \vec{A} \cdot \vec{J}_k d\Omega \quad \text{Équation I-11}$$

Nous retrouvons donc bien la formule employée sous Flux2D.  $\Omega_k$  représente la surface de la bobine considérée. Cette dernière étant composée de deux conducteurs surfaciques, le flux d'une bobine correspond donc bien à la différence :

$$\phi_k = \frac{L}{i_0} \iint_{\Omega_0} \vec{A} \cdot \vec{J}_0 d\Omega_0 - \frac{L}{i_k} \iint_{\Omega_k} \vec{A} \cdot \vec{J}_k d\Omega_k \quad \text{Équation I-12}$$



## **Annexe II. Composantes matricielles des transformateurs**

Cette annexe donne les composantes des équations matricielles données dans le chapitre 3.

### **Transformateur Dy<sub>n</sub>**

Lorsque le système est mis sous la forme :

$$\begin{bmatrix} V_p \\ V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ I_s \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-1}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_H \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{AB} \\ U_{BC} \\ U_{CA} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{an} \\ V_{bn} \\ V_{cn} \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-2}$$

les matrices  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  et  $[D]$  sont :

$$\begin{aligned} [A] &= \begin{bmatrix} \frac{Z_p}{3} - \frac{a}{3} & -\frac{Z_p}{3} + \frac{a}{3} & Z_p + 2a \\ \frac{Z_p}{3} - \frac{a}{3} & -\frac{2a}{3} + \frac{2Z_p}{3} & Z_p + 2a \\ \frac{2a}{3} - \frac{2Z_p}{3} & -\frac{Z_p}{3} + \frac{a}{3} & Z_p + 2a \end{bmatrix} & [B] &= \begin{bmatrix} Z_m & b & b \\ b & Z_m & b \\ b & b & Z_m \end{bmatrix} \\ [C] &= \begin{bmatrix} \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3} & -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3} & Z_m + 2b \\ \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3} & -\frac{2b}{3} + \frac{2Z_m}{3} & Z_m + 2b \\ \frac{2b}{3} - \frac{2Z_m}{3} & -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3} & Z_m + 2b \end{bmatrix} & [D] &= \begin{bmatrix} Z_s & c & c \\ c & Z_s & c \\ c & c & Z_s \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \text{Équation II-3}$$

Dans le cas où les tensions primaires et les courants secondaires sont connus, le système peut se mettre sous la forme de l'Équation II-4:

$$\begin{bmatrix} I_p \\ V_s \end{bmatrix} = [Z_{TRDyn}] \begin{bmatrix} I_s \\ V_p \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad [Z_{TRDyn}] = \begin{bmatrix} -A^{-1}.B & A^{-1} \\ D - C.A^{-1}.B & C.A^{-1} \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-4}$$

Les matrices  $[-A^{-1}.B]$ ,  $[A^{-1}]$ ,  $[D - C.A^{-1}.B]$ , et  $[C.A^{-1}]$ , sont données ci-après :

$$-A^{-1}.B = \begin{bmatrix} -\frac{-Zm+b}{a-Zp} & 0 & \frac{-Zm+b}{a-Zp} \\ \frac{-Zm+b}{a-Zp} & -\frac{-Zm+b}{a-Zp} & 0 \\ -\frac{Zm+2b}{3(Zp+2a)} & -\frac{Zm+2b}{3(Zp+2a)} & -\frac{Zm+2b}{3(Zp+2a)} \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-5}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{a-Zp} & 0 & \frac{1}{a-Zp} \\ \frac{1}{a-Zp} & -\frac{1}{a-Zp} & 0 \\ \frac{1}{3(Zp+2a)} & \frac{1}{3(Zp+2a)} & \frac{1}{3(Zp+2a)} \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-6}$$

$$D-C.A^{-1}.B =$$

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{-Zs Zp^2 - Zs a Zp + 2 Zs a^2 - 4 b Zm a + 2 b^2 Zp + Zp Zm^2 + Zm^2 a}{(a-Zp)(Zp+2a)}, \right. \\ & \frac{-c Zp^2 - c a Zp + 2 c a^2 + 2 b Zm Zp - 2 b^2 a + b^2 Zp - Zm^2 a}{(a-Zp)(Zp+2a)}, \\ & \left. \frac{-c Zp^2 - c a Zp + 2 c a^2 + 2 b Zm Zp - 2 b^2 a + b^2 Zp - Zm^2 a}{(a-Zp)(Zp+2a)} \right] \\ & \left[ \frac{-c Zp^2 - c a Zp + 2 c a^2 + 2 b Zm Zp - 2 b^2 a + b^2 Zp - Zm^2 a}{(a-Zp)(Zp+2a)}, \right. \\ & \frac{-Zs Zp^2 - Zs a Zp + 2 Zs a^2 - 4 b Zm a + 2 b^2 Zp + Zp Zm^2 + Zm^2 a}{(a-Zp)(Zp+2a)}, \\ & \left. \frac{-c Zp^2 - c a Zp + 2 c a^2 + 2 b Zm Zp - 2 b^2 a + b^2 Zp - Zm^2 a}{(a-Zp)(Zp+2a)} \right] \\ & \left[ \frac{-c Zp^2 - c a Zp + 2 c a^2 + 2 b Zm Zp - 2 b^2 a + b^2 Zp - Zm^2 a}{(a-Zp)(Zp+2a)}, \right. \\ & \frac{-c Zp^2 - c a Zp + 2 c a^2 + 2 b Zm Zp - 2 b^2 a + b^2 Zp - Zm^2 a}{(a-Zp)(Zp+2a)}, \\ & \left. \frac{-Zs Zp^2 - Zs a Zp + 2 Zs a^2 - 4 b Zm a + 2 b^2 Zp + Zp Zm^2 + Zm^2 a}{(a-Zp)(Zp+2a)} \right] \end{aligned} \quad \text{Équation II-7}$$

$$C.A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-Zm Zp - Zm a + 2 b a}{(a-Zp)(Zp+2a)} & \frac{Zm a - b Zp}{(a-Zp)(Zp+2a)} & \frac{Zm a - b Zp}{(a-Zp)(Zp+2a)} \\ \frac{Zm a - b Zp}{(a-Zp)(Zp+2a)} & \frac{-Zm Zp - Zm a + 2 b a}{(a-Zp)(Zp+2a)} & \frac{Zm a - b Zp}{(a-Zp)(Zp+2a)} \\ \frac{Zm a - b Zp}{(a-Zp)(Zp+2a)} & \frac{Zm a - b Zp}{(a-Zp)(Zp+2a)} & \frac{-Zm Zp - Zm a + 2 b a}{(a-Zp)(Zp+2a)} \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-8}$$

**Transformateur Ddy<sub>n</sub>**

A partir de la matrice caractéristique du transformateur  $Ddy_n$  (présentée dans Équation 3-35 du chapitre 3), il est possible de créer 9 sous matrices  $[A]$ ,  $[B]$ , ...,  $[I]$  telles que :

$$\begin{bmatrix} V_p \\ V_{s1} \\ V_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ G & H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_p \\ I_{s1} \\ I_{s2} \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-9}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} I_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_H \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{b1} \\ I_{h1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} I_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{a2} \\ I_{b2} \\ I_{c2} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{AB} \\ U_{BC} \\ U_{CA} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_{s1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{a1b1} \\ U_{b1c1} \\ U_{c1a1} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} V_{s2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{a2n} \\ V_{b2n} \\ V_{c2n} \end{bmatrix}$$

(Équation II-10)

Les différentes sous matrices s'écrivent :

$$[A] = \begin{bmatrix} \frac{Z_p}{3} - \frac{a}{3} & -\frac{Z_p}{3} + \frac{a}{3} & Z_p + 2a \\ \frac{Z_p}{3} - \frac{a}{3} & -\frac{2a}{3} + \frac{2Z_p}{3} & Z_p + 2a \\ \frac{2a}{3} - \frac{2Z_p}{3} & -\frac{Z_p}{3} + \frac{a}{3} & Z_p + 2a \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-11}$$

$$[B] = \begin{bmatrix} \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3} & -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3} & Z_m + 2b \\ \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3} & -\frac{2b}{3} + \frac{2Z_m}{3} & Z_m + 2b \\ \frac{2b}{3} - \frac{2Z_m}{3} & -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3} & Z_m + 2b \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-12}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} Z_m & b & b \\ b & Z_m & b \\ b & b & Z_m \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-13}$$

$$[D] = \begin{bmatrix} \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3} & -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3} & Z_m + 2b \\ \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3} & -\frac{2b}{3} + \frac{2Z_m}{3} & Z_m + 2b \\ \frac{2b}{3} - \frac{2Z_m}{3} & -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3} & Z_m + 2b \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-14}$$

$$[E] = \begin{bmatrix} \frac{Z_s}{3} - \frac{c}{3} & -\frac{Z_s}{3} + \frac{c}{3} & Z_s + 2c \\ \frac{Z_s}{3} - \frac{c}{3} & -\frac{2c}{3} + \frac{2Z_s}{3} & Z_s + 2c \\ \frac{2c}{3} - \frac{2Z_s}{3} & -\frac{Z_s}{3} + \frac{c}{3} & Z_s + 2c \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-15}$$

$$[F] = \begin{bmatrix} Z_n & d & d \\ d & Z_n & d \\ d & d & Z_n \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-16}$$

$$[G] = \begin{bmatrix} \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3} & -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3} & Z_m + 2b \\ \frac{Z_m}{3} - \frac{b}{3} & -\frac{2b}{3} + \frac{2Z_m}{3} & Z_m + 2b \\ \frac{2b}{3} - \frac{2Z_m}{3} & -\frac{Z_m}{3} + \frac{b}{3} & Z_m + 2b \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-17}$$

$$[H] = \begin{bmatrix} \frac{Z_n}{3} - \frac{d}{3} & -\frac{Z_n}{3} + \frac{d}{3} & Z_n + 2d \\ \frac{Z_n}{3} - \frac{d}{3} & -\frac{2d}{3} + \frac{2Z_n}{3} & Z_n + 2d \\ \frac{2d}{3} - \frac{2Z_n}{3} & -\frac{Z_n}{3} + \frac{d}{3} & Z_n + 2d \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-18}$$

$$[I] = \begin{bmatrix} Z_s & e & e \\ e & Z_s & e \\ e & e & Z_s \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-19}$$

Certains arrangements matriciels peuvent être envisagés, en fonction des inconnues et des variables. Dans le cas où les tensions primaires et les courants secondaires sont connus, on utilise l'Équation II-20:

$$\begin{bmatrix} I_p \\ V_{s1} \\ V_{s2} \end{bmatrix} = [Z_{TRDdyn}] \begin{bmatrix} V_p \\ I_{s1} \\ I_{s2} \end{bmatrix} \text{ avec } [Z_{TRDdyn}] = \begin{bmatrix} A^{-1} & -A^{-1}.B & -A^{-1}.C \\ D.A^{-1} & E - D.A^{-1}.B & F - D.A^{-1}.C \\ G.A^{-1} & H - G.A^{-1}.B & I - G.A^{-1}.C \end{bmatrix} \quad \text{Équation II-20}$$

Par souci de compacité de l'annexe, nous ne développerons pas les sous matrices de  $Z_{TRDdyn}$ .

### **Annexe III. Mesure des paramètres d'un transformateur**

Les études sur les transformateurs présentées dans le chapitre 3 nous ont permis d'établir des matrices équivalentes pour caractériser différents types de transformateur, en fonction des inconnues du système. Le point de départ des études résidait dans la matrice primitive du transformateur, c'est-à-dire dans la matrice des inductances propres et des mutuelles caractérisant les différents conducteurs et leurs couplages électromagnétiques. Le but de ce chapitre est de proposer une méthode de mesure, afin de caractériser les matrices primitives des transformateurs. Pour cela, nous nous baserons sur un transformateur 9 enroulements, disponible au laboratoire. Le protocole de mesure sera détaillé, et les mesures seront réalisées sur ce transformateur. Nous proposerons enfin un moyen de globaliser les résultats pour des transformateurs de plus forte puissance.

#### **Rappels théoriques : cas du transformateur à deux enroulements**

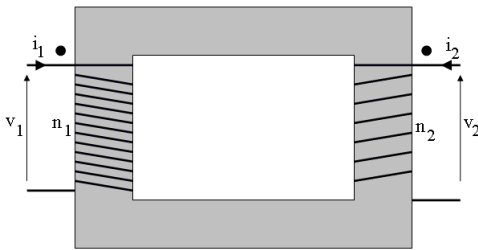


Figure III-1 : Transformateur à deux enroulements

Le comportement électromagnétique d'un transformateur à deux enroulements peut se modéliser par les équations de base des circuits couplés. La Figure III-1 présente la structure de principe d'un transformateur à deux enroulements.

Selon le choix des orientations des enroulements, les équations associées peuvent s'écrire avec le formalisme de Laplace :

$$v_1 = L_1 \cdot p.i_1 + M \cdot p.i_2 \quad \text{Équation III-1}$$

$$v_2 = L_2 \cdot p.i_2 + M \cdot p.i_1 \quad \text{Équation III-2}$$

Nous rappelons que  $L_1$  et  $L_2$  sont les inductances propres des enroulements primaires et secondaires, et que  $M$  représente la mutuelle inductance à travers un facteur  $k$ , inférieur à 1, qui rend compte de l'imperfection du couplage électromagnétique :

$$M = k \cdot \sqrt{L_1 \cdot L_2} = k \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot L_1 = k \cdot \frac{n_1}{n_2} \cdot L_2 \quad \text{Équation III-3}$$

Avec l'Équation III-2, on peut en déduire :

$$i_2 = \frac{v_2 - M \cdot p.i_1}{L_2 \cdot p} \quad \text{Équation III-4}$$

En reportant l'Équation III-4 dans l'Équation III-1, on obtient l'expression suivante :

$$v_2 = \frac{n_2}{k.n_1} [v_1 - (1 - k^2).L_1.p.i_1] \quad \text{Équation III-5}$$

A partir de cette expression caractéristique, il est possible de donner les paramètres des deux schémas inductifs les plus couramment utilisés ; leur représentation est donnée Figure III-2.

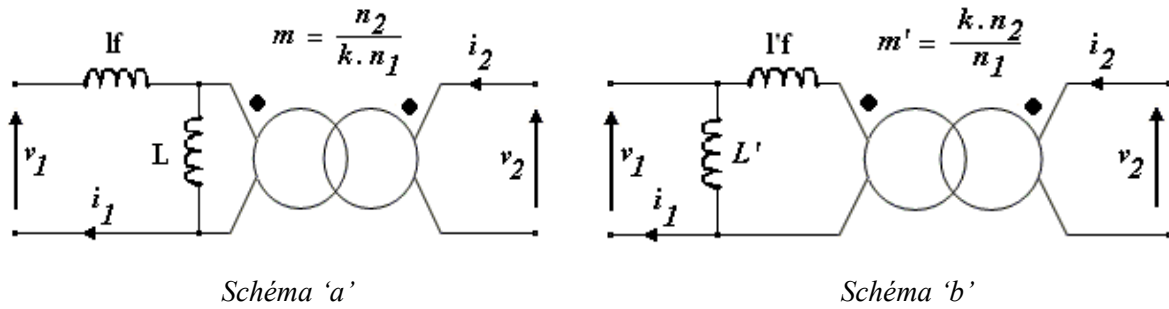


Figure III-2 : Schémas équivalents inductifs d'un transformateur monophasé

Dans le schéma 'a' de la Figure III-2, l'expression de la tension  $v_2$  est :

$$v_2 = m.[v_1 - lf.p.i_1] \quad \text{Équation III-6}$$

Si l'on identifie avec l'Équation III-5, on obtient directement :

$$lf = (1 - k^2).L_1 \quad m = \frac{n_2}{k.n_1} \quad \text{Équation III-7}$$

Il est ensuite aisé d'en déduire  $L$ , sachant que, dans le fonctionnement à vide, l'inductance vue par  $v_1$  est toujours  $L_1$ . En effet,  $L_1 = lf + L$ , ce qui mène à :

$$L = k^2.L_1 \quad \text{Équation III-8}$$

Pour le schéma 'b', l'inductance  $L'$  est directement  $L_1$ . L'expression de  $v_2$  devient :

$$v_2 = m' \left[ v_1 - l'f.p \left( i_1 - \frac{v_1}{L_1.p} \right) \right] = m' \left( 1 + \frac{l'f}{L_1} \right) \left[ v_1 - \frac{l'f.L_1}{l'f + L_1}.p.i_1 \right] \quad \text{Équation III-9}$$

De la même façon, si l'on identifie cette forme à l'Équation III-5, on a :

$$l'f = \frac{(1 - k^2)}{k^2}.L_1 = \frac{lf}{k^2} \quad m' = \frac{k.n_2}{n_1} = k^2.m \quad L' = L_1 = \frac{L}{k^2} \quad \text{Équation III-10}$$

Expérimentalement, il est facile de mesurer ces paramètres par une mesure à vide et une mesure en court-circuit, effectuées indifféremment au primaire ou au secondaire, le premier cas étant mieux



adapté aux schémas proposés. L'inductance mesurée à vide, notée  $L_v$ , est toujours  $L_l$ . L'inductance mesurée en court-circuit, notée  $L_{cc}$ , est l'inductance  $lf = (1-k^2).L_l$ . La mesure de ces deux grandeurs nous donne  $k$  :

$$k = \sqrt{1 - \frac{L_{cc}}{L_v}} \quad \text{Équation III-11}$$

On en déduit ensuite les paramètres des deux schémas conformément au Tableau III-1

Schéma 'a'	Schéma 'b'
$L = k^2 . L_v$	$L' = L_v$
$lf = L_{cc}$	$l' f = \frac{L_{cc}}{k^2}$

Tableau III-1 : Valeurs des inductances de fuite et des inductances magnétisantes

Pour un transformateur sans entrefer, le coefficient  $k$  atteint aisément des valeurs supérieures à 0,99. Dans cette hypothèse, les deux schémas deviennent tout à fait similaires. Les valeurs des inductances de fuites globales  $lf$  et  $l'f$ , qui apparaissent dans les deux schémas sont quasiment identiques. Cela justifie le fait que l'on utilise généralement la notion d'inductance de fuite globale ramenée au primaire ou au secondaire, sans préciser la nature du schéma utilisé, ce dernier ayant peu d'influence sur la valeur de cette inductance. Parallèlement, les rapports de transformation sont effectivement très proches de la valeur théorique  $n_2/n_1$ .

### Méthodologie pour un transformateur à neuf enroulements

L'étude d'un transformateur à 9 enroulements (1 primaire et 2 secondaires triphasés), revient à étudier un système couplé de 36 (nombre de mutuelles du système) transformateurs monophasés. Le protocole de mesure est présenté Figure III-3.

Matrice inductance d'un transformateur monophasé	Matrice inductance d'un transformateur à 9 enroulements
$L = \begin{bmatrix} L_{10} & M_{12} \\ M_{21} & L_{20} \end{bmatrix}$	$L = \begin{bmatrix} L_{10} & M_{12} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & M_{19} \\ M_{21} & L_{20} & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ M_{91} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & M_{98} & L_{90} \end{bmatrix}$

Tableau III-2 : Matrices inductance de transformateurs à 2 et à 9 enroulements

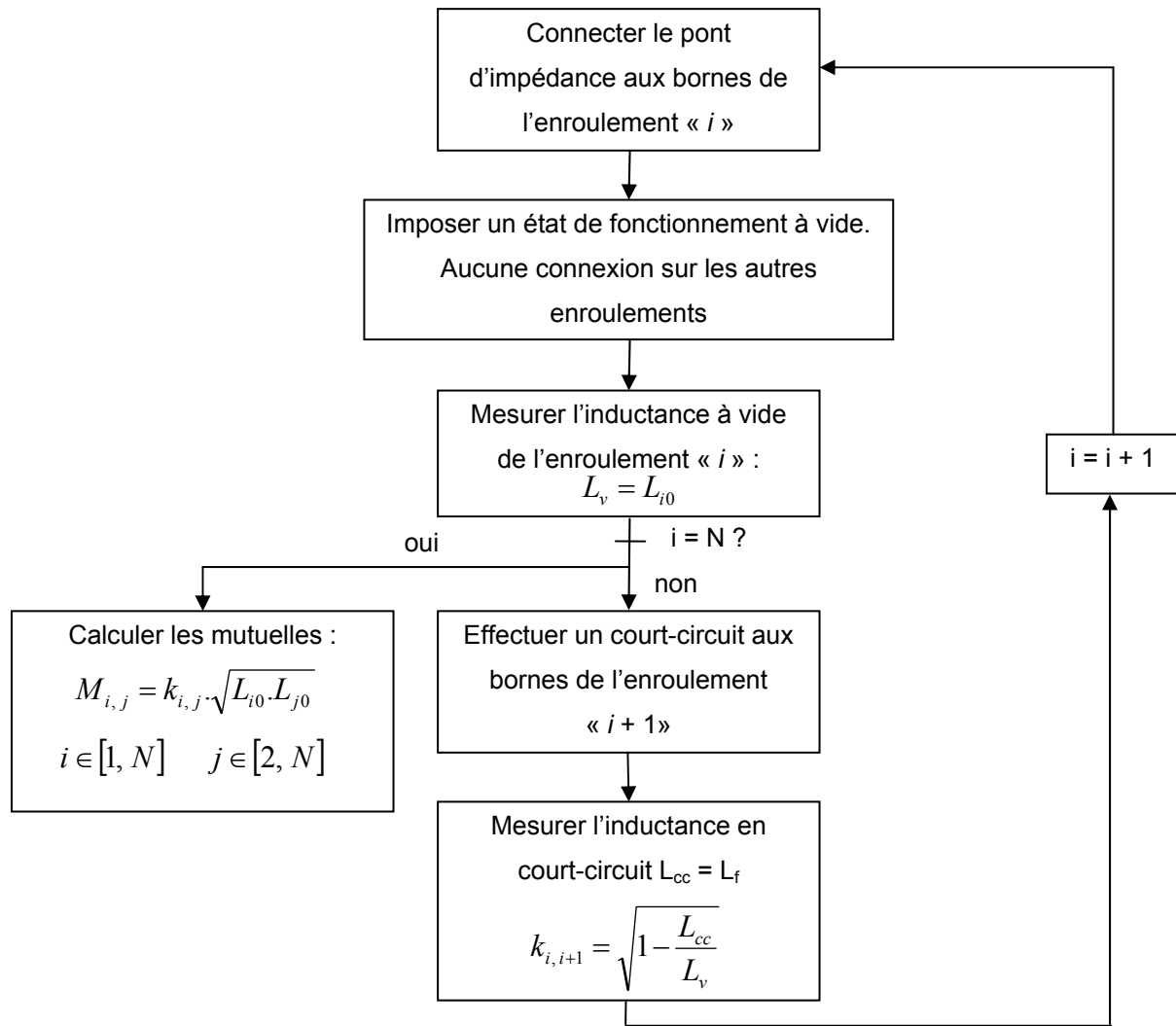


Figure III-3 : Protocole de mesure pour obtenir la matrice inductance d'un transformateur à  $N$  enroulements

### Résultats des mesures effectuées

Le transformateur étudié est un transformateur triphasé disposant de 3 enroulements au primaire et de 6 enroulements au secondaire. Ses propriétés sont les suivantes : 150 V / 2\*75,5 V,  $f = 50$  Hz,  $S = 10$  kVA, Couplage  $Y_{yy}$ . Les bobinages des enroulements primaires et secondaires sont réalisés sur un noyau magnétique de type 'E'. Les mesures montreront donc une symétrie du problème suivant la colonne centrale.

Les inductances du système étant dépendantes de la fréquence des courants d'excitation, les expérimentations sur le transformateur à 9 enroulements ont été réalisées pour 3 fréquences différentes : 50 Hz, 1 kHz et 10 kHz. Une interpolation linéaire peut être réalisée entre les matrices afin de connaître les caractéristiques du transformateur pour une fréquence différente. L'obtention des termes de la matrice a été possible via une série de mesures d'impédance à vide et en court-circuit du transformateur grâce à des calculs tension / courant réalisés par un pont d'impédance (Agilent 4294A).

Les 3 matrices inductances obtenues après expérimentations sont données ci-après. La numérotation s'est faite en commençant par les trois enroulements primaires, et en terminant par les six enroulements secondaires : cf. Figure III-4.

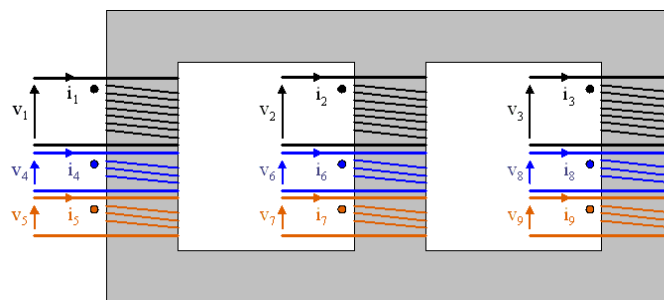


Figure III-4 : Bobinage du transformateur étudié

$$f = 50 \text{ Hz} \quad L = \begin{bmatrix} 70,64 & 54,02 & 14,06 & 38,90 & 38,89 & 30,71 & 30,72 & 7,80 & 7,50 \\ 54,02 & 99,51 & 64,12 & 26,41 & 26,37 & 56,22 & 56,21 & 25,27 & 25,22 \\ 14,06 & 64,12 & 70,64 & 9,78 & 9,66 & 30,71 & 30,69 & 38,00 & 37,98 \\ 38,90 & 26,41 & 9,78 & 21,47 & 21,46 & 18,00 & 18,00 & 5,33 & 5,14 \\ 38,89 & 26,37 & 9,66 & 21,46 & 21,47 & 18,00 & 18,00 & 5,32 & 5,12 \\ 30,71 & 56,22 & 30,71 & 18,00 & 18,00 & 31,81 & 31,80 & 15,31 & 15,28 \\ 30,72 & 56,21 & 30,69 & 18,00 & 18,00 & 31,80 & 31,81 & 16,27 & 16,85 \\ 7,80 & 25,27 & 38,00 & 5,33 & 5,32 & 15,31 & 16,27 & 20,48 & 20,47 \\ 7,50 & 25,22 & 37,98 & 5,14 & 5,12 & 15,28 & 16,85 & 20,47 & 20,48 \end{bmatrix} \quad mH \quad \text{Équation III-12}$$

$$f = 1 \text{ kHz} \quad L = \begin{bmatrix} 26,95 & 18,64 & 7,06 & 15,96 & 15,95 & 11,28 & 11,20 & 4,29 & 4,15 \\ 18,64 & 36,51 & 22,68 & 10,84 & 10,73 & 21,70 & 21,69 & 10,18 & 10,03 \\ 7,06 & 22,68 & 26,95 & 5,50 & 5,36 & 11,29 & 11,27 & 15,46 & 15,45 \\ 15,96 & 10,84 & 5,50 & 9,50 & 9,49 & 6,83 & 6,81 & 2,85 & 2,75 \\ 15,95 & 10,73 & 5,36 & 9,49 & 9,50 & 6,80 & 6,78 & 2,77 & 2,69 \\ 11,28 & 21,70 & 11,29 & 6,83 & 6,80 & 12,94 & 12,93 & 6,09 & 6,02 \\ 11,20 & 21,69 & 11,27 & 6,81 & 6,78 & 12,93 & 12,94 & 6,07 & 6,07 \\ 4,29 & 10,18 & 15,46 & 2,85 & 2,77 & 6,09 & 6,07 & 8,91 & 8,90 \\ 4,15 & 10,03 & 15,45 & 2,75 & 2,69 & 6,02 & 6,07 & 8,90 & 8,91 \end{bmatrix} \quad mH \quad \text{Équation III-13}$$

$$f = 10 \text{ kHz} \quad L = \begin{bmatrix} 11,58 & 7,43 & 3,12 & 6,69 & 6,68 & 4,31 & 4,31 & 1,81 & 1,80 \\ 7,43 & 15,76 & 9,43 & 4,31 & 4,31 & 9,11 & 9,10 & 4,27 & 4,28 \\ 3,12 & 9,43 & 11,58 & 1,87 & 1,87 & 4,32 & 4,32 & 6,66 & 6,65 \\ 6,69 & 4,31 & 1,87 & 3,90 & 3,89 & 2,51 & 2,51 & 1,08 & 1,08 \\ 6,68 & 4,31 & 1,87 & 3,89 & 3,90 & 2,51 & 2,51 & 1,08 & 1,06 \\ 4,31 & 9,11 & 4,32 & 2,51 & 2,51 & 5,30 & 5,29 & 2,48 & 2,48 \\ 4,31 & 9,10 & 4,32 & 2,51 & 2,51 & 5,29 & 5,30 & 2,49 & 2,49 \\ 1,81 & 4,27 & 6,66 & 1,08 & 1,08 & 2,48 & 2,49 & 3,86 & 3,85 \\ 1,80 & 4,28 & 6,65 & 1,08 & 1,06 & 2,48 & 2,49 & 3,85 & 3,86 \end{bmatrix} \quad mH \quad \text{Équation III-14}$$

A partir des expérimentations, nous pouvons vérifier que les inductances du transformateur sont symétriques par rapport à la jambe centrale du circuit magnétique en forme de 'E' : Pour les enroulements primaire comme pour les enroulements secondaires, les inductances propres des conducteurs bobines sur les colonnes extérieures sont quasiment identiques. Les symétries ne sont néanmoins pas tout à fait parfaites. Les répercussions des dissymétries pourront être analysées dans le cadre d'études fréquentielles de sous-stations de traction.

### Principe de généralisation des résultats

Les études menées sur le transformateur à 9 enroulements sont des études spécifiques, mais elles peuvent être étendues à des transformateurs de puissance plus importante, ou à des transformateurs possédant un nombre d'enroulements différent :

- Tout d'abord, il est trivial de se ramener à un transformateur triphasé  $Y_y$ . Il suffit pour se faire de supprimer les enroulements correspondants au deuxième secondaire du transformateur  $Y_n y_n$ . Les matrices inductances  $9 \times 9$  se simplifieront en matrices inductances  $6 \times 6$ , caractérisant ainsi parfaitement un transformateur triphasé  $Y_n y_n$ .
- Pour prendre en compte différents niveaux de puissance des transformateurs, une transformation doit également être apportée au sein des matrices inductances. En première approximation, si les flux de fuites d'un transformateur monophasé sont faibles, le coefficient de couplage entre les enroulements est quasi unitaire. Le coefficient de dispersion (ou coefficient de Blondel), étant défini comme le rapport du flux de fuite sur le flux magnétisant, est quant à lui quasi nul ( $\sigma = \frac{l_f}{L_1}$ ). Ces considérations restent vraies dans une très large gamme de puissance pour les transformateurs. En d'autres termes, cela signifie que sur une matrice inductance, les termes mutuels seront établis à partir d'une constance des coefficients de couplage entre les enroulements. Pour ce qui est des inductances propres, en première approximation, ces dernières varient de manière linéaire avec la puissance du transformateur.

Prenons par exemple le cas d'un transformateur  $Y_{yy}$  de 100 kVA à 50 Hz. Les mesures sur le transformateur  $Y_{yy}$  décrit dans l'Équation III-12. Afin d'établir la matrice inductance d'un transformateur 10 fois plus puissant, il faut au préalable calculer les coefficients de couplage entre les différents enroulements. Les résultats sont condensés dans le Tableau III-3 (symétrique) :

$k$	$1$	$2$	$3$	$4$	$5$	$6$	$7$	$8$	$9$
$1$	$X$	0,644	0,199	0,999	0,999	0,648	0,648	0,205	0,197
$2$	0,644	$X$	0,765	0,571	0,571	0,999	0,999	0,560	0,559
$3$	0,199	0,765	$X$	0,251	0,248	0,648	0,648	0,999	0,999
$4$	0,999	0,571	0,251	$X$	0,999	0,688	0,688	0,254	0,245
$5$	0,999	0,571	0,248	0,999	$X$	0,688	0,688	0,254	0,245
$6$	0,648	0,999	0,648	0,688	0,688	$X$	0,999	0,600	0,599
$7$	0,648	0,999	0,648	0,688	0,688	0,999	$X$	0,637	0,660
$8$	0,205	0,560	0,999	0,254	0,254	0,600	0,637	$X$	0,999
$9$	0,197	0,559	0,999	0,245	0,245	0,599	0,660	0,999	$X$

Tableau III-3 : Coefficients de couplage du transformateur  $Y_{yy}$  à 50 Hz

Ces coefficients de couplage pourront être considérés comme identiques pour deux transformateurs de puissances différentes. Ainsi, pour un transformateur 10 fois plus puissant, seules les inductances propres (termes diagonaux de la matrice inductance) vont varier dans le même ratio. La détermination des mutuelles propres se fera ensuite avec l'Équation III-3.

Remarque : Les termes surlignés dans le tableau des coefficients de couplage entre les enroulements du transformateur montrent bien que les enroulements qui sont bobinés sur une même colonne du transformateur sont très bien couplés. Les flux de fuite entre ces enroulements sont très faibles.



## Annexe IV. Détermination d'une fréquence équivalente

Un régime de fonctionnement transitoire non périodique est délicat à représenter dans le domaine fréquentiel, car sa durée temporelle est finie, et son spectre associé est souvent très riche. Des techniques du type temps-fréquence peuvent être utilisées afin de déterminer l'évolution du contenu spectral, mais ces techniques sont souvent complexes. Pour nos différents cas d'étude, nous allons nous baser sur une méthode simple, très simplifiée, souvent utilisée dans le monde de Compatibilité ElectroMagnétique (CEM).

Soit un signal  $x(t)$  d'amplitude  $E$  donné par la courbe ci-dessous :

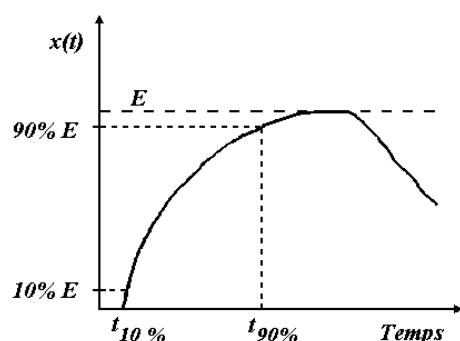


Figure IV-1 : Evolution du signal  $x(t)$  fonction du temps

Le temps de montée  $t_m$  du signal  $x(t)$  est défini tel que :  $t_m = t_{90\%} - t_{10\%}$

En approximant le signal  $x(t)$  à un signal exponentiel, on peut écrire :

$$0,9.E = E \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t_{90\%}}{\tau}} \right) \quad \text{Équation IV-1}$$

$$0,1.E = E \cdot \left( 1 - e^{-\frac{t_{10\%}}{\tau}} \right) \quad \text{Équation IV-2}$$

D'où :

$$t_{90\%} = -\tau \cdot \ln(1 - 0,9) \quad \text{Équation IV-3}$$

$$t_{10\%} = -\tau \cdot \ln(1 - 0,1) \quad \text{Équation IV-4}$$

Le temps de montée  $t_m$  peut ainsi s'exprimer :

$$t_m = \tau \cdot (\ln(0,9) - \ln(0,1)) \quad \text{Équation IV-5}$$

$$t_m = 2,2 \tau$$

En terme de pulsation de coupure  $\omega_c$ , nous pouvons écrire :

$$\tau = \frac{1}{\omega_c} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_c} \quad \text{Équation IV-6}$$

En injectant l'Équation IV-5 dans l'Équation IV-6, on a :

$$t_m = \frac{2,2}{2.\pi.f_c} = \frac{0,35}{f_c}$$

*Équation IV-7*

Cette dernière équation donne la fréquence équivalente d'un signal temporel transitoire non périodique grâce à son temps de montée. Cette méthode est basée sur l'approximation de la dynamique du signal à une fonction exponentielle.



## **Annexe V. Méthode de calcul numérique des harmoniques**

Le formalisme complexe adopté pour la méthode fréquentielle itérative et le passage des notations complexes aux notations matricielles sont présentés en [IORDACHE-02]. Un rappel des notations est cependant proposé dans cette annexe.

### **Transformation d'une grandeur par la modulation**

L'harmonique de rang  $k$  de la fonction de modulation  $F_{mod}(\theta)$ , est exprimé sous la forme :

$$\overline{F_k} = F_{ak} + j \cdot F_{bk} \quad \text{Équation V-1}$$

Nous pouvons aussi écrire la fonction de modulation comme :

$$F_{mod}(\theta) = F_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (F_{ak} \cdot \cos(k \cdot \theta) + F_{bk} \cdot \sin(k \cdot \theta)) \quad \text{Équation V-2}$$

où les parties réelles et imaginaires de  $\overline{F_k}$  représentent les coefficients de Fourier :

$$F_{ak} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_{mod}(\theta) \cdot \cos(k \cdot \theta) \cdot d\theta \quad \text{Équation V-3}$$

$$F_{bk} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_{mod}(\theta) \cdot \sin(k \cdot \theta) \cdot d\theta \quad \text{Équation V-4}$$

Par conséquent, nous pouvons exprimer  $\overline{F_k}$  en fonction de  $F_{mod}(\theta)$  :

$$\overline{F_k} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_{mod}(\theta) \cdot (\cos(k \cdot \theta) + j \cdot \sin(k \cdot \theta)) \cdot d\theta = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_{mod}(\theta) \cdot e^{j \cdot k \cdot \theta} \cdot d\theta \quad \text{Équation V-5}$$

La grandeur modulée par  $F_{mod}(\theta)$  est  $X_p(\theta)$  de fréquence  $f_x = p \cdot f_m$  où  $p$  est un réel positif. De la même façon, nous définissons  $X_p(\theta)$  :

$$X_p(\theta) = X_{ap} \cdot \cos(p \cdot \theta) + X_{bp} \cdot \sin(p \cdot \theta) = \frac{1}{2} \cdot (\overline{X_p}^* \cdot e^{j \cdot p \cdot \theta} + \overline{X_p} \cdot e^{-j \cdot p \cdot \theta}) \quad \text{Équation V-6}$$

Le résultat de la modulation est  $Y(\theta) = X_p(\theta) \cdot F_{mod}(\theta)$ . L'expression de sa décomposition harmonique est :

$$Y(\theta) = Y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (Y_{an} \cdot \cos(n \cdot \theta) + Y_{bn} \cdot \sin(n \cdot \theta)) = Y_0 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{Y_n}^* \cdot e^{j \cdot n \cdot \theta} + \overline{Y_n} \cdot e^{-j \cdot n \cdot \theta}) \quad \text{Équation V-7}$$

Pour  $n = 0$ , la composante continue de  $Y(\theta)$  est :

$$Y_0 = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} Y(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_{\text{mod}}(\theta) \cdot X_p(\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot \left( \overline{X_p}^* \cdot e^{j \cdot p \cdot \theta} + \overline{X_p} \cdot e^{-j \cdot p \cdot \theta} \right) \cdot F_{\text{mod}}(\theta) \cdot d\theta =$$

$$\frac{1}{4} \cdot \overline{X_p}^* \cdot \int_0^{2\pi} F_{\text{mod}}(\theta) \cdot e^{j \cdot p \cdot \theta} d\theta + \frac{1}{4} \cdot \overline{X_p} \cdot \int_0^{2\pi} F_{\text{mod}}(\theta) \cdot e^{-j \cdot p \cdot \theta} d\theta \quad \text{Équation V-8}$$

D'où :

$$Y_0 = \frac{1}{4} \cdot \overline{X_p}^* \cdot \overline{F_p} + \frac{1}{4} \cdot \overline{X_p} \cdot \overline{F_p}^* \quad \text{Équation V-9}$$

Pour que  $Y_0$  existe, il faut que  $p$  soit entier. Pour  $n > 0$ , l'harmonique  $\overline{Y_n}$  est calculé de la même façon :

$$\overline{Y_n} = Y_{an} + j \cdot Y_{bn} = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot F_{\text{mod}}(\theta) \cdot \left( \overline{X_p}^* \cdot e^{j \cdot p \cdot \theta} + \overline{X_p} \cdot e^{-j \cdot p \cdot \theta} \right) \cdot e^{j \cdot n \cdot \theta} d\theta =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \overline{X_p}^* \cdot \int_0^{2\pi} F_{\text{mod}}(\theta) \cdot e^{j \cdot (p+n) \cdot \theta} d\theta + \frac{1}{2} \cdot \overline{X_p} \cdot \int_0^{2\pi} F_{\text{mod}}(\theta) \cdot e^{j \cdot (n-p) \cdot \theta} d\theta \quad \text{Équation V-10}$$

D'où :

$$\overline{Y_n} = \frac{1}{2} \cdot \overline{X_p}^* \cdot \overline{F_{p+n}} + \frac{1}{2} \cdot \overline{X_p} \cdot \overline{F_{p-n}}^* \quad \text{Équation V-11}$$

Nous pouvons remarquer dans les Équation V-9 et Équation V-10 que la grandeur complexe  $\overline{X_p}$  apparaît sous sa forme conjuguée, ce qui nous empêche de la mettre en facteur. En adoptant une écriture des équations sous forme matricielle, on peut contourner cette difficulté.

### **Passage d'une notation complexe à une notation matricielle**

En considérant trois grandeurs complexes  $\overline{X} = X_a + j \cdot X_b$ ,  $\overline{F} = F_a + j \cdot F_b$  et  $\overline{Y} = Y_a + j \cdot Y_b$ , nous pouvons définir les opérations de multiplication à l'aide de matrices en passant à une notation vectorielle.

$$\overline{Y} = \overline{X} \cdot \overline{F} = (X_a \cdot F_a - X_b \cdot F_b) + j \cdot (X_a \cdot F_b + X_b \cdot F_a) \quad \text{Équation V-12}$$

Ce qui sous forme matricielle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a & -F_b \\ F_b & F_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} \quad \text{Équation V-13}$$

De la même manière, nous pouvons établir les relations suivantes :

$$\bar{Y} = \bar{X} \cdot \bar{F}^* = (X_a \cdot F_a + X_b \cdot F_b) + j \cdot (-X_a \cdot F_b + X_b \cdot F_a) \quad \text{Équation V-14}$$

$$\begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a & F_b \\ -F_b & F_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} \quad \text{Équation V-15}$$

$$\bar{Y} = \bar{X}^* \cdot \bar{F} = (X_a \cdot F_a + X_b \cdot F_b) + j \cdot (X_a \cdot F_b - X_b \cdot F_a) \quad \text{Équation V-16}$$

$$\begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a & F_b \\ F_b & -F_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} \quad \text{Équation V-17}$$

$$\bar{Y} = \bar{X}^* \cdot \bar{F}^* = (X_a \cdot F_a - X_b \cdot F_b) + j \cdot (-X_a \cdot F_b - X_b \cdot F_a) \quad \text{Équation V-18}$$

$$\begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a & -F_b \\ -F_b & -F_a \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix} \quad \text{Équation V-19}$$

Dans chacune des expressions précédentes, nous pouvons remarquer que le vecteur  $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_a \\ X_b \end{bmatrix}$

Est en facteur. La grandeur de sortie dépend ainsi linéairement de la grandeur d'entrée. Sous cette forme, les Équation V-9 et Équation V-11 s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} Y_0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \left( \begin{bmatrix} F_{ap} & F_{bp} \\ F_{bp} & -F_{ap} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{ap} & F_{bp} \\ -F_{bp} & F_{ap} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} X_{ap} \\ X_{bp} \end{bmatrix} \quad \text{Équation V-20}$$

$$\begin{bmatrix} Y_{an} \\ Y_{bn} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left( \begin{bmatrix} F_{a(p+n)} & F_{b(p+n)} \\ F_{b(p+n)} & -F_{a(p+n)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{a(p-n)} & F_{b(p-n)} \\ -F_{b(p-n)} & F_{a(p-n)} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} X_{ap} \\ X_{bp} \end{bmatrix} \quad \text{Équation V-21}$$

La relation de linéarité est respectée. Nous pouvons donc toujours exprimer linéairement une grandeur modulée par rapport à une matrice de transfert  $M_F$  entrée-sortie :  $Y = M_F \cdot X$ .

Lors du calcul numérique, les développements en séries de Fourier seront limités à un rang maximal qui assure une approximation suffisante de la fonction. Il est important de savoir, en fonction des rangs  $n$  de la grandeur résultante et  $p$  de la grandeur modulée, quels rangs  $k$  de la fonction de modulation il faut prendre en compte pour les calculs.

Pour déduire les rangs  $k$  de  $F_{mod}$  qui, en fonction du rang  $p$  de  $X_p$ , participent à la génération de chaque rang  $n$  de  $Y$  il faut considérer trois cas :

$p > n > 0$

Pour  $k = p + n \Rightarrow p > k - p > 0 \Rightarrow 2.p > k > p$

Pour  $k = p - n \Rightarrow p > p - k > 0 \Rightarrow p > k > 0$

$p = n > 0$

Pour  $k = p + n \Rightarrow k = 2.p > 0$

Pour  $k = p - n \Rightarrow k = 0, p > 0$

$n > p$

Pour  $k = p + n \Rightarrow k - p > p \Rightarrow k > 2.p$

Pour  $k = n - p \Rightarrow k + p > p \Rightarrow k > 0$

## Annexe VI. Dérivées des termes de la jacobienne

Cette annexe donne les expressions des dérivées de tous les termes des matrices jacobienues du pont redresseur monophasé et du pont redresseur triphasé.

### Pont redresseur monophasé

L'Équation VI-1 donne l'expression de la jacobienne  $\mathbf{J}_n$  du pont redresseur monophasé :

$$\begin{pmatrix} F_{Vac} \\ F_{Idc} \\ F_{\theta} \\ F_{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_{Vac}}{\partial Vac} & \frac{\partial F_{Vac}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{Vac}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{Vac}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Vac} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{\theta}}{\partial Vac} & \frac{\partial F_{\theta}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{\phi}}{\partial Vac} & \frac{\partial F_{\phi}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \phi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta Vac \\ \Delta Idc \\ \Delta \theta \\ \Delta \phi \end{pmatrix} \Leftrightarrow f(X_n) = \mathbf{J}_n dX_n \quad \text{Équation VI-1}$$

Nous rappelons que les inconnues  $Vac$ ,  $Idc$ ,  $\theta$  et  $\phi$  sont indépendantes les unes par rapport aux autres. Les équations de circuit ont été développées dans le chapitre 5; les différentes dérivées partielles sont données ci-après :

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{Vac}}{\partial Vac^k} = \frac{\partial}{\partial Vac^k} [Y_t^k (V_s - Vac) - Iac] = -Y_t^k \cdot \frac{\partial Vac}{\partial Vac^k} - \frac{\partial Iac}{\partial Vac^k} \quad \text{Équation VI-2}$$

$Y_t^k$  et  $\frac{\partial Vac}{\partial Vac^k}$  sont des matrices carrées définies telles que :

$$Y_t = \begin{bmatrix} Y_t^0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & Y_t^{n_h} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad Y_t^k = \begin{bmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{bmatrix} \quad \text{Équation VI-3}$$

Et

$$\frac{\partial Vac}{\partial Vac} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Vac}{\partial Vac^0} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial Vac}{\partial Vac^{n_h}} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \frac{\partial Vac}{\partial Vac^k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = [Id] \quad \text{Équation VI-4}$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial Iac}{\partial Vac^k} = \frac{\partial}{\partial Vac^k} [(F_1 - F_3) \otimes Idc + F_2 \otimes Icom_2 + F_4 \otimes Icom_4]$$

Équation VI-5

$$\frac{\partial Iac}{\partial Vac^k} = F_2 \otimes \frac{\partial Icom_2}{\partial Vac^k} + F_4 \otimes \frac{\partial Icom_4}{\partial Vac^k} \quad (\text{Matrice})$$

Où :

$$\begin{cases} \frac{\partial Icom_2}{\partial Vac^k} = \frac{\partial Ic}{\partial Vac^k} - \frac{\partial D_2}{\partial Vac^k} + \frac{\partial E_2}{\partial Vac^k} \\ \frac{\partial Icom_4}{\partial Vac^k} = \frac{\partial Ic}{\partial Vac^k} - \frac{\partial D_4}{\partial Vac^k} - \frac{\partial E_4}{\partial Vac^k} \end{cases}$$

Équation VI-6

Équation VI-7

Et :

$$\frac{\partial Ic}{\partial Vac^k} = \frac{1}{j.k.X}$$

Équation VI-8

$\frac{\partial Ic}{\partial Vac^k}$  est une matrice carrée, telle que :  $\forall k > 0$ ,

$$\frac{\partial Ic}{\partial Vac^k} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k.X} \\ -\frac{1}{k.X} & 0 \end{bmatrix}$$

Équation VI-9

Enfin, les vecteurs ligne  $\frac{\partial D_i}{\partial Vac^k}$  et  $\frac{\partial E_i}{\partial Vac^k}$  s'expriment selon les expressions :

$$\left\{ \frac{\partial D_i}{\partial Vac^k} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} \frac{\partial Ic}{\partial Vac^k} \cdot e^{j.k.\theta_i} \right\} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{j.k.X} \cdot e^{j.k.\theta_i} \right\} \right.$$

Équation VI-10

$$\left\{ \frac{\partial E_i}{\partial Vac^k} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} \frac{\partial Idc}{\partial Vac^k} \cdot e^{j.k.\theta_i} \right\} = 0 \quad (\text{Variables indépendantes}) \right.$$

Équation VI-11

Rappel :  $\theta_2 = \theta$ ,  $\theta_4 = \theta + \pi$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{Vac}}{\partial Idc^k} = \frac{\partial}{\partial Idc^k} [Yt^k \cdot (Vs - Vac) - Iac] = -\frac{\partial Iac}{\partial Idc^k}$$

Équation VI-12

Avec :

$$\frac{\partial Iac}{\partial Idc^k} = \frac{\partial}{\partial Idc^k} [(F_1 - F_3) \otimes Idc + F_2 \otimes Icom_2 + F_4 \otimes Icom_4]$$

Équation VI-13

$$\frac{\partial Iac}{\partial Idc^k} = (F_1 - F_3) + F_2 \otimes \frac{\partial Icom_2}{\partial Idc^k} + F_4 \otimes \frac{\partial Icom_4}{\partial Idc^k} \quad (\text{Matrice})$$

Et :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Icom_2}{\partial Idc^k} = \frac{\partial E_2}{\partial Idc^k} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} e^{j.k.\theta} \right\} \\ \frac{\partial Icom_4}{\partial Idc^k} = -\frac{\partial E_4}{\partial Idc^k} = -\text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} e^{j.k.(\theta+\pi)} \right\} \end{array} \right. \quad (\text{Vecteurs ligne}) \quad \begin{array}{l} \text{Équation VI-14} \\ \text{Équation VI-15} \end{array}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{Vac}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} [Y_t^k (V_s - V_{ac}) - I_{ac}] = -\frac{\partial I_{ac}}{\partial \theta} \quad \text{Équation VI-16}$$

Avec :

$$\frac{\partial I_{ac}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta} [(F_1 - F_3) \otimes Idc + F_2 \otimes Icom_2 + F_4 \otimes Icom_4] \quad (\text{Vecteur colonne})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{ac}}{\partial \theta} &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial \theta} - \frac{\partial F_3}{\partial \theta} \right) \otimes Idc + \frac{\partial F_2}{\partial \theta} \otimes Icom_2 + F_2 \otimes \frac{\partial Icom_2}{\partial \theta} + \frac{\partial F_4}{\partial \theta} \otimes Icom_4 \\ &+ F_4 \otimes \frac{\partial Icom_4}{\partial \theta} \end{aligned} \quad \text{Équation VI-17}$$

Où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Icom_2}{\partial \theta} = -\frac{\partial D_2}{\partial \theta} + \frac{\partial E_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Icom_4}{\partial \theta} = -\frac{\partial D_4}{\partial \theta} - \frac{\partial E_4}{\partial \theta} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{Scalaire}) \\ (\text{Scalaire}) \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Équation VI-18} \\ \text{Équation VI-19} \end{array}$$

Et :

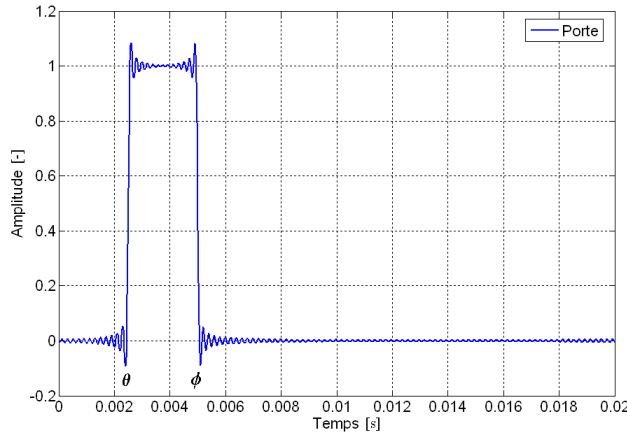
$$\frac{\partial D_2}{\partial \theta} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} j.k.Ic^k e^{j.k.\theta} \right\} \quad (\text{Scalaire}) \quad \text{Équation VI-20}$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial \theta} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} j.k.Idc^k e^{j.k.\theta} \right\} \quad (\text{Scalaire}) \quad \text{Équation VI-21}$$

$$\frac{\partial D_4}{\partial \theta} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} j.k.Ic^k e^{j.k.(\theta+\pi)} \right\} \quad (\text{Scalaire}) \quad \text{Équation VI-22}$$

$$\frac{\partial E_4}{\partial \theta} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} j.k.Idc^k e^{j.k.(\theta+\pi)} \right\} \quad (\text{Scalaire}) \quad \text{Équation VI-23}$$

Pour la fonction de modulation  $F_3$ , définie telle que :

Figure VI-1 : Porte  $F_3$ , domaine temporel

$$\forall k \in Q_*^+, F_3^k = \frac{j}{2\pi} (e^{-j.k.\phi} - e^{-j.k.\theta})$$

(Équation VI-24)

$$k = 0, \phi \geq \theta, F_3^0 = \frac{\phi - \theta}{2\pi}$$

(Équation VI-25)

Sa dérivée  $\frac{\partial F_3}{\partial \theta}$  s'écrit :

$$\forall k \in \mathcal{T}_*^+, \frac{\partial F_3^k}{\partial \theta} = -\frac{1}{\pi} \cdot e^{-j.k.\theta}$$

Équation VI-26

$$k = 0, \phi \geq \theta, \frac{\partial F_3^0}{\partial \theta} = -\frac{1}{2\pi}$$

Équation VI-27

En suivant le même procédé, les autres dérivées peuvent être obtenues facilement.

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{Vac}}{\partial \phi} = \frac{\partial}{\partial \phi} [Y_t^k \cdot (V_s - V_{ac}) - I_{ac}] = -\frac{\partial I_{ac}}{\partial \phi}$$

Équation VI-28

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{ac}}{\partial \phi} &= \left( \frac{\partial F_1}{\partial \phi} - \frac{\partial F_3}{\partial \phi} \right) \otimes I_{dc} + \frac{\partial F_2}{\partial \phi} \otimes I_{com_2} + F_2 \otimes \frac{\partial I_{com_2}}{\partial \phi} + \frac{\partial F_4}{\partial \phi} \otimes I_{com_4} \\ &+ F_4 \otimes \frac{\partial I_{com_4}}{\partial \phi} \end{aligned}$$

Équation VI-29

Les dérivées des fonctions de modulation selon  $\phi$  seront calculées sur le précédent modèle, cf. Figure VI-1.

$$\frac{\partial I_{com_i}}{\partial \phi} = [0] \quad (I_{com_i} \text{ n'est pas une fonction dépendant de } \phi)$$

Équation VI-30

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{Idc}}{\partial V_{ac}^k} = \frac{\partial}{\partial V_{ac}^k} [V_{dc} - Z_f \cdot (I_{dc} - I_s)] = \frac{\partial V_{dc}}{\partial V_{ac}^k}$$

Équation VI-31



Avec :

$$\frac{\partial Vdc}{\partial Vac^k} = \frac{\partial}{\partial Vac^k} [F_1 \otimes Vdc_1 + F_3 \otimes Vdc_3] \quad (\text{Matrice}) \quad \text{Équation VI-32}$$

Et :

$$\begin{cases} Vdc_1^k = Vac^k - j.k.X.Idc \\ Vdc_3^k = -Vac^k - j.k.X.Idc \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{Équation VI-33} \\ \text{Équation VI-34} \end{matrix}$$

Donc :

$$\frac{\partial F_{Idc}}{\partial Vac^k} = F_1 - F_3 \quad (\text{Matrice}) \quad \text{Équation VI-35}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Idc^k} = \frac{\partial}{\partial Idc^k} [Vdc - Zf.(Idc - Is)] = \frac{\partial Vdc}{\partial Idc^k} - Zf^k \quad \text{Équation VI-36}$$

$Zf$  est définie telle que :  $Zf = Rf + j.Xf$ . Son expression matricielle est :

$$Zf = \begin{bmatrix} Zf^0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & Zf^{n_h} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad Zf^k = \begin{bmatrix} Rf & -Xf \\ Xf & Rf \end{bmatrix} \quad \text{Équation VI-37}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \frac{\partial Vdc}{\partial Idc^k} &= \frac{\partial}{\partial Idc^k} [F_1 \otimes Vdc_1 + F_3 \otimes Vdc_3] \\ \frac{\partial Vdc}{\partial Idc^k} &= F_1 \otimes \frac{\partial Vdc_1}{\partial Idc^k} + F_3 \otimes \frac{\partial Vdc_3}{\partial Idc^k} \quad (\text{Matrice}) \end{aligned} \quad \text{Équation VI-38}$$

Avec :

$$\frac{\partial Vdc_1}{\partial Idc^k} = \frac{\partial Vdc_3}{\partial Idc^k} = -j.k.X \quad \text{Équation VI-39}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{Idc}}{\partial \theta} = \frac{\partial Vdc}{\partial \theta} \quad \text{Équation VI-40}$$

Avec :

$$\frac{\partial Vdc}{\partial \theta} = \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \otimes Vdc_1 + \frac{\partial F_3}{\partial \theta} \otimes Vdc_3 \quad (\text{Vecteur colonne}) \quad \text{Équation VI-41}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{Idc}}{\partial \phi} = \frac{\partial Vdc}{\partial \phi} \quad \text{Équation VI-42}$$

Avec :

$$\frac{\partial Vdc}{\partial \phi} = \frac{\partial F_1}{\partial \phi} \otimes Vdc_1 + \frac{\partial F_3}{\partial \phi} \otimes Vdc_3 \quad (\text{Vecteur colonne}) \quad \text{Équation VI-43}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_\theta}{\partial Vac^k} = \frac{\partial}{\partial Vac^k} \left[ -\text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} (Vac^k - j.k.Idc^k) e^{j.k.\theta} \right\} \right] \quad \text{Équation VI-44}$$

D'où :

$$\frac{\partial F_\theta}{\partial Vac^k} = -\text{Re} \{ e^{j.k.\theta} \} \quad (\text{Vecteur ligne}) \quad \text{Équation VI-45}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_\theta}{\partial Idc^k} = \frac{\partial}{\partial Idc^k} \left[ -\text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} (Vac^k - j.k.Idc^k) e^{j.k.\theta} \right\} \right] \quad \text{Équation VI-46}$$

C'est à dire:

$$\frac{\partial F_\theta}{\partial Idc^k} = \text{Re} \{ j.k.e^{j.k.\theta} \} \quad (\text{Vecteur ligne}) \quad \text{Équation VI-47}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} = -\text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} j.k.(Vac^k - j.k.Idc^k) e^{j.k.\theta} \right\} \quad (\text{Scalaire}) \quad \text{Équation VI-48}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi} = 0 \quad (\text{Scalaire}) \quad \text{Équation VI-49}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_\phi}{\partial Vac^k} = \frac{\partial}{\partial Vac^k} \left[ Idc^0 - D_2 + E_2 + \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} (Ic^k - Idc^k) e^{j.k.\phi} \right\} \right] \quad \text{Équation VI-50}$$

D'où :

$$\frac{\partial F_\phi}{\partial Vac^k} = -\frac{\partial D_2}{\partial Vac^k} + \frac{\partial}{\partial Vac^k} \cdot \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} Ic^k \cdot e^{j.k.\phi} \right\}$$

$$\frac{\partial F_\phi}{\partial Vac^k} = \text{Re} \left\{ \frac{1}{j.k.X} \cdot (e^{j.k.\phi} - e^{j.k.\theta}) \right\} \quad (\text{Vecteur ligne}) \quad \text{Équation VI-51}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_\phi}{\partial Idc^k} = \frac{\partial}{\partial Idc^k} \left[ Idc^0 - D_2 + E_2 + \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} (Ic^k - Idc^k) e^{j.k.\phi} \right\} \right] \quad \text{Équation VI-52}$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\partial F_\phi}{\partial Idc^k} = \frac{\partial Idc^0}{\partial Idc^k} + \text{Re} \{ e^{j.k.\theta} - e^{j.k.\phi} \} \quad (\text{Vecteur ligne}) \quad \text{Équation VI-53}$$

Avec

$$\frac{\partial Idc^0}{\partial Idc^k} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \forall k > 0 \end{cases} \quad \text{Équation VI-54}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial D_2}{\partial \theta} + \frac{\partial E_2}{\partial \theta} \quad (\text{Scalaire}) \quad \text{Équation VI-55}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} j.k. (Ic^k - Idc^k) e^{j.k.\phi} \right\} \quad (\text{Scalaire}) \quad \text{Équation VI-56}$$

L'ensemble de ces dérivées partielles permet de remplir la matrice jacobienne  $J_n$  du pont redresseur monophasé.

### **Pont redresseur triphasé**

L'Équation VI-57 rappelle l'expression de la matrice jacobienne du pont redresseur triphasé :

$$\begin{bmatrix} F_{Vac_1} \\ F_{Vac_2} \\ F_{Vac_3} \\ F_{Idc} \\ F_{\theta} \\ F_{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial Vac_1} & \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial Vac_2} & \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial Vac_3} & \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{Vac_2}}{\partial Vac_1} & \frac{\partial F_{Vac_2}}{\partial Vac_2} & \frac{\partial F_{Vac_2}}{\partial Vac_3} & \frac{\partial F_{Vac_2}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{Vac_2}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{Vac_2}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{Vac_3}}{\partial Vac_1} & \frac{\partial F_{Vac_3}}{\partial Vac_2} & \frac{\partial F_{Vac_3}}{\partial Vac_3} & \frac{\partial F_{Vac_3}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{Vac_3}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{Vac_3}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Vac_1} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Vac_2} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Vac_3} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{\theta}}{\partial Vac_1} & \frac{\partial F_{\theta}}{\partial Vac_2} & \frac{\partial F_{\theta}}{\partial Vac_3} & \frac{\partial F_{\theta}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \phi} \\ \frac{\partial F_{\phi}}{\partial Vac_1} & \frac{\partial F_{\phi}}{\partial Vac_2} & \frac{\partial F_{\phi}}{\partial Vac_3} & \frac{\partial F_{\phi}}{\partial Idc} & \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \theta} & \frac{\partial F_{\phi}}{\partial \phi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Vac_1 \\ Vac_2 \\ Vac_3 \\ Idc \\ \theta \\ \phi \end{bmatrix} \quad \text{Équation VI-57}$$

Les inconnues  $Vac_1$ ,  $Vac_2$ ,  $Vac_3$ ,  $Idc$ ,  $\theta_n$  et  $\phi_n$  sont indépendantes les unes par rapport aux autres. Les équations de circuit ont été données dans le chapitre 5; les différentes dérivées partielles sont données ci-après :

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial Vac_1^k} = \frac{\partial}{\partial Vac_1^k} [Y_{t1} \cdot (V_{S1} - Vac_1) - Iac_1] = -Y_{t1} - \frac{\partial Iac_1}{\partial Vac_1^k} \quad \text{Équation VI-58}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Iac_1}{\partial Vac_1^k} &= \frac{\partial}{\partial Vac_1^k} [Idc \otimes (F_2 + F_3 + F_4 + F_5 - F_8 - F_9 - F_{10} - F_{11}) + Icom_1 \otimes F_1 \\ &\quad - Icom_3 \otimes F_5 + Icom_4 \otimes F_7 - Icom_6 \otimes F_{11}] \quad (\text{Matrice}) \end{aligned} \quad \text{Équation VI-59}$$

En développant l'équation, nous avons :

$$\frac{\partial Iac_1}{\partial Vac_1^k} = \frac{\partial Icom_1}{\partial Vac_1^k} \otimes F_1 - \frac{\partial Icom_3}{\partial Vac_1^k} \otimes F_5 + \frac{\partial Icom_4}{\partial Vac_1^k} \otimes F_7 - \frac{\partial Icom_6}{\partial Vac_1^k} \otimes F_{11} \quad \text{Équation VI-60}$$

Avec :

$$\frac{\partial Icom_n}{\partial Vac_1^k} = \frac{\partial}{\partial Vac_1^k} [Ic_n - D_n] = \frac{\partial Ic_n}{\partial Vac_1^k} - \frac{\partial D_n}{\partial Vac_1^k} \quad \text{et} \quad D_n = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} Ic_n^k \cdot e^{j.k.\theta_n} \right\} \quad \text{Équation VI-61}$$

où :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I_{c_n}}{\partial Vac_i^k} = \begin{cases} -\frac{1}{j.k.(X_b + X_e)} & , i = b \\ +\frac{1}{j.k.(X_b + X_e)} & , i = e \\ 0 & , i = o \end{cases} \\ \frac{\partial D_n}{\partial Vac_i^k} = \text{Re} \left\{ \frac{\partial I_c}{\partial Vac_i^k} \cdot e^{j.k.\theta_n} \right\} \end{array} \right. \quad \text{Équation VI-62}$$

Le processus de dérivation est le même pour les six autres dérivées  $\frac{\partial I_{ac_1}}{\partial Vac_2^k}$ ,  $\frac{\partial I_{ac_1}}{\partial Vac_3^k}$ ,  $\frac{\partial I_{ac_2}}{\partial Vac_1^k}$ ,  $\frac{\partial I_{ac_2}}{\partial Vac_2^k}$ ,  $\frac{\partial I_{ac_2}}{\partial Vac_3^k}$ ,  $\frac{\partial I_{ac_3}}{\partial Vac_1^k}$ ,  $\frac{\partial I_{ac_3}}{\partial Vac_2^k}$ ,  $\frac{\partial I_{ac_3}}{\partial Vac_3^k}$ .

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{Vac_1}}{\partial Idc^k} = \frac{\partial}{\partial Idc^k} [Y_{t_1} \cdot (V_{S_1} - Vac_1) - I_{ac_1}] = -\frac{\partial I_{ac_1}}{\partial Idc^k} \quad \text{Équation VI-63}$$

Avec :

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_{ac_1}}{\partial Idc^k} &= (F_2 + F_3 + F_4 + F_5 - F_8 - F_9 - F_{10} - F_{11}) + \frac{\partial I_{com_1}}{\partial Idc^k} \otimes F_1 - \frac{\partial I_{com_3}}{\partial Idc^k} \otimes F_5 \\ &+ \frac{\partial I_{com_4}}{\partial Idc^k} \otimes F_7 - \frac{\partial I_{com_6}}{\partial Idc^k} \otimes F_{11} \quad (\text{Matrice}) \end{aligned} \quad \text{Équation VI-64}$$

Et :

$$\frac{\partial I_{com_n}}{\partial Idc^k} = \frac{\partial I_{c_n}}{\partial Idc^k} - \frac{\partial D_n}{\partial Idc^k} \quad (\text{Matrice}) \quad \text{Équation VI-65}$$

Où  $\frac{\partial I_{c_n}}{\partial Idc^k}$  est une matrice et  $\frac{\partial D_n}{\partial Idc^k}$  est un vecteur ligne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial I_{c_n}}{\partial Idc^k} = \frac{X_b}{X_b + X_e} \\ \frac{\partial D_n}{\partial Idc^k} = \text{Re} \left\{ \frac{\partial I_{c_n}}{\partial Idc^k} \cdot e^{j.k.\theta_n} \right\} \end{array} \right. \quad \text{Équation VI-66}$$

Le raisonnement est identique pour  $\frac{\partial F_{Vac_2}}{\partial Idc^k}$  et  $\frac{\partial F_{Vac_3}}{\partial Idc^k}$ .

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{vac_1}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{vac_1}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial F_{vac_1}}{\partial \theta_6} \end{bmatrix} \quad (6 \text{ Vecteurs colonne}) \quad \text{Équation VI-67}$$

Avec :

$$\frac{\partial F_{vac_1}}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial Iac_1}{\partial \theta_i} \quad (\text{Vecteur colonne}) \quad \text{Équation VI-68}$$

A titre d'illustration, nous raisonnerons sur l'angle  $\theta_1$  :

$$\begin{aligned} \frac{\partial Iac_1}{\partial \theta_1} &= Idc \otimes \left( \frac{\partial F_2}{\partial \theta_1} + \frac{\partial F_3}{\partial \theta_1} + \frac{\partial F_4}{\partial \theta_1} + \frac{\partial F_5}{\partial \theta_1} - \frac{\partial F_8}{\partial \theta_1} - \frac{\partial F_9}{\partial \theta_1} - \frac{\partial F_{10}}{\partial \theta_1} - \frac{\partial F_{11}}{\partial \theta_1} \right) \\ &+ \frac{\partial Icom_1}{\partial \theta_1} \otimes F_1 + Icom_1 \otimes \frac{\partial F_1}{\partial \theta_1} - \frac{\partial Icom_3}{\partial \theta_1} \otimes F_5 - Icom_3 \otimes \frac{\partial F_5}{\partial \theta_1} + \frac{\partial Icom_4}{\partial \theta_1} \otimes F_7 \\ &+ Icom_4 \otimes \frac{\partial F_7}{\partial \theta_1} - \frac{\partial Icom_6}{\partial \theta_1} \otimes F_{11} - Icom_6 \otimes \frac{\partial F_{11}}{\partial \theta_1} \end{aligned} \quad \text{Équation VI-69}$$

En étudiant le tableau caractérisant les 12 états de conduction du pont redresseur triphasé (cf. Tableau 5-4), nous constatons que beaucoup de termes de l'Équation VI-69 disparaissent. En effet, seuls les fonctions de modulation  $F_1$  et  $F_{12}$  et le courant de commutation  $Icom_1$  dépendent de l'angle  $\theta_1$ . D'où :

$$\frac{\partial Iac_1}{\partial \theta_1} = \frac{\partial Icom_1}{\partial \theta_1} \otimes F_1 + Icom_1 \otimes \frac{\partial F_1}{\partial \theta_1} - Icom_6 \otimes \frac{\partial F_{11}}{\partial \theta_1} \quad \text{Équation VI-70}$$

Les dérivées des fonctions de modulation ont déjà été étudiées, cf. Figure VI-1. Pour la dérivée du courant de commutation, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial Icom_i}{\partial \theta_i} = -\frac{\partial D_i}{\partial \theta_i} = -\text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} j.k.Ic_i^k . e^{j.k.\theta_i} \right\} \quad (\text{Scalaire}) \quad \text{Équation VI-71}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{vac_1}}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{vac_1}}{\partial \phi_1} & \dots & \frac{\partial F_{vac_1}}{\partial \phi_6} \end{bmatrix} \quad (6 \text{ Vecteurs colonne}) \quad \text{Équation VI-72}$$

Avec :

$$\frac{\partial F_{vac_1}}{\partial \phi_i} = -\frac{\partial Iac_1}{\partial \phi_i} \quad (\text{Vecteur colonne}) \quad \text{Équation VI-73}$$

Nous travaillerons ici sur l'angle  $\phi_1$ . Au même titre que précédemment, de nombreux termes se simplifient du fait de leur non dépendance vis-à-vis de  $\phi_1$  (seuls les états 1 et 2 des différents régimes de fonctionnement sont à considérer).

$$\frac{\partial I_{ac_1}}{\partial \phi_1} = I_{dc} \otimes \frac{\partial F_2}{\partial \phi_1} + I_{com_1} \otimes \frac{\partial F_1}{\partial \phi_1} \quad (\text{Vecteur colonne}) \quad \text{Équation VI-74}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Vac_1^k} = \frac{\partial}{\partial Vac_1^k} [V_{dc} - Z_f \cdot (I_{dc} - I_s)] = \frac{\partial V_{dc}}{\partial Vac_1^k} \quad \text{Équation VI-75}$$

Avec :

$$\frac{\partial V_{dc}}{\partial Vac_1^k} = \sum_{p=1}^{12} \frac{\partial V_{dc_p}}{\partial Vac_1^k} \otimes F_p \quad (\text{Matrice}) \quad \text{Équation VI-76}$$

Et :

$$\frac{\partial V_{dc_p}}{\partial Vac_i^k} = \begin{cases} \forall p \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \left\{ \begin{array}{l} i = b, \frac{\partial V_{dc_p}}{\partial Vac_i^k} = 1 \\ i = o, \frac{\partial V_{dc_p}}{\partial Vac_i^k} = -1 \\ i = e, \frac{\partial V_{dc_p}}{\partial Vac_i^k} = 0 \end{array} \right. \\ \\ \forall p \in \{1, 5, 9\} \left\{ \begin{array}{l} i = b, \frac{\partial V_{dc_p}}{\partial Vac_i^k} = \frac{X_e}{X_e + X_b} \\ i = o, \frac{\partial V_{dc_p}}{\partial Vac_i^k} = -1 \\ i = e, \frac{\partial V_{dc_p}}{\partial Vac_i^k} = \frac{X_b}{X_e + X_b} \end{array} \right. \\ \\ \forall p \in \{3, 7, 11\} \left\{ \begin{array}{l} i = b, \frac{\partial V_{dc_p}}{\partial Vac_i^k} = \frac{-X_e}{X_e + X_b} \\ i = o, \frac{\partial V_{dc_p}}{\partial Vac_i^k} = 1 \\ i = e, \frac{\partial V_{dc_p}}{\partial Vac_i^k} = \frac{-X_b}{X_e + X_b} \end{array} \right. \end{cases} \quad \text{Équation VI-77}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{Idc}}{\partial Idc^k} = \frac{\partial V_{dc}}{\partial Idc^k} - Z_f \quad \text{Équation VI-78}$$

Avec :

$$\frac{\partial Vdc}{\partial Idc^k} = \sum_{p=1}^{12} \frac{\partial Vdc_p}{\partial Idc} \otimes F_p \quad (\text{Matrice}) \quad \text{Équation VI-79}$$

Et :

$$\frac{\partial Vdc_p}{\partial Idc} = \begin{cases} -j.k.(X_b + X_o) & \forall p \in \{2, 4, 6, 8, 10, 12\} \\ -j.k.(X_e.X_b) & \forall p \in \{1, 3, 5, 7, 9, 11\} \\ X_e + X_b & \end{cases} \quad \text{Équation VI-80}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{Idc}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{Idc}}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial F_{Idc}}{\partial \theta_6} \end{bmatrix} \quad (6 \text{ Vecteurs colonne}) \quad \text{Équation VI-81}$$

Avec :

$$\frac{\partial F_{Idc}}{\partial \theta_i} = \sum_{p=1}^{12} Vdc_p \otimes \frac{\partial F_p}{\partial \phi_i} \quad \text{Équation VI-82}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{\theta}}{\partial Vac_1^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{\theta_1}}{\partial Vac_1^k} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_{\theta_6}}{\partial Vac_1^k} \end{bmatrix} \quad (6 \text{ Vecteurs ligne}) \quad \text{Équation VI-83}$$

Avec :

$$\frac{\partial F_{\theta_n}}{\partial Vac_1^k} = \text{Re} \left\{ \left( \frac{\partial Vd_{2,n-1}}{\partial Vac_1^k} - \frac{\partial Vd_{2,n}}{\partial Vac_1^k} \right) e^{j.k.\theta_n} \right\} \quad (\text{Vecteur ligne}) \quad \text{Équation VI-84}$$

Le procédé de calcul est identique pour  $\frac{\partial F_{\theta_n}}{\partial Vac_2^k}$  et  $\frac{\partial F_{\theta_n}}{\partial Vac_3^k}$ .

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{\theta}}{\partial Idc^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{\theta_1}}{\partial Idc^k} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_{\theta_6}}{\partial Idc^k} \end{bmatrix} \quad (6 \text{ Vecteurs ligne}) \quad \text{Équation VI-85}$$

Avec :

$$\frac{\partial F_{\theta_n}}{\partial Idc^k} = \text{Re} \left\{ \left( \frac{\partial Vd_{2,n-1}}{\partial Idc^k} - \frac{\partial Vd_{2,n}}{\partial Idc^k} \right) e^{j.k.\theta_n} \right\} \quad (\text{Vecteur ligne}) \quad \text{Équation VI-86}$$



$$\bullet \quad \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{\theta_1}}{\partial \theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_{\theta_6}}{\partial \theta_6} \end{bmatrix} \quad (\text{Matrice diagonale de scalaires}) \quad \text{Équation VI-87}$$

Avec :

$$\frac{\partial F_{\theta_n}}{\partial \theta_n} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} j.k. (Vd_{2,n-1}^k - Vd_{2,n}^k) e^{j.k.\theta_n} \right\} \quad (\text{Scalaire}) \quad \text{Équation VI-88}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{\theta}}{\partial \phi} = [0] \quad (\text{Matrice 6x6 nulle}) \quad \text{Équation VI-89}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{\phi}}{\partial Vac_1^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{\phi_1}}{\partial Vac_1^k} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_{\phi_6}}{\partial Vac_1^k} \end{bmatrix} \quad (6 \text{ Vecteurs ligne}) \quad \text{Équation VI-90}$$

Avec :

$$\frac{\partial F_{\phi_n}}{\partial Vac_1^k} = -\text{Re} \left\{ \frac{\partial Ic_n^k}{\partial Vac_1^k} (e^{j.k.\theta_n} + e^{j.k.\phi_n}) \right\} \quad (\text{Vecteur ligne}) \quad \text{Équation VI-91}$$

Le même principe est applicable pour  $\frac{\partial F_{\phi_n}}{\partial Vac_2^k}$  et  $\frac{\partial F_{\phi_n}}{\partial Vac_3^k}$ .

$$\bullet \quad \frac{\partial F_{\phi}}{\partial Idc^k} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{\phi_1}}{\partial Idc^k} \\ \vdots \\ \frac{\partial F_{\phi_6}}{\partial Idc^k} \end{bmatrix} \quad (6 \text{ Vecteurs ligne}) \quad \text{Équation VI-92}$$

Avec :

$$\frac{\partial F_{\phi_n}}{\partial Idc^k} = \frac{\partial Idc^0}{\partial Idc^k} - \text{Re} \left\{ \frac{\partial Ic_n}{\partial Idc^k} e^{j.k.\theta_n} \right\} + \text{Re} \left\{ \left( 1 - \frac{\partial Ic_n}{\partial Idc^k} \right) e^{j.k.\phi_n} \right\} \quad (\text{Vecteur ligne}) \quad \text{Équation VI-93}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{\phi_1}}{\partial \theta_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_{\phi_6}}{\partial \theta_6} \end{bmatrix} \quad (\text{Matrice diagonale de scalaires}) \quad \text{Équation VI-94}$$

Avec :

$$\frac{\partial F_\phi}{\partial \theta_n} = -\text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} j.k.Ic_n^k . e^{j.k.\theta_n} \right\} \quad (\text{Scalaire}) \quad \text{Équation VI-95}$$

$$\bullet \quad \frac{\partial F_\phi}{\partial \phi} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{\phi_1}}{\partial \phi_1} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial F_{\phi_6}}{\partial \phi_6} \end{bmatrix} \quad (\text{Matrice diagonale de scalaires}) \quad \text{Équation VI-96}$$

Avec :

$$\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi_n} = \text{Re} \left\{ \sum_{k=1}^{n_h} j.k.(Idc^k - Ic_n^k) e^{j.k.\phi_n} \right\} \quad (\text{Scalaire}) \quad \text{Équation VI-97}$$

**Publications pendant la thèse**

MORIN, E. *Caractérisation d'un système multiconducteurs par les éléments finis pour une alimentation de tramway par le sol*. JCGE'03, Saint Nazaire, juin 2003.

MORIN, E. & CORNIC, D. & MEUNIER, G. & RETIERE, N. & ROUDET, J. *Use of a finite elements method to characterize a Multiconductor transmission line problem on a tram ground-powered system*. IEEE Compumag, Saratoga, July 2003.

CAIRE, R. & RETIERE, N. & MORIN, E. & FONTELA, M. & HADJSAID, N. *Voltage management of distributed generation in distribution networks*. IEEE General meeting, Toronto, July 2003.



## *Bibliographie*



## **Bibliographie**

[ALSTOM-98]	ALSTOM, Traction Ltd. <i>CITADIS Power control interface for auxiliary converter</i> . Référence 10145M2403, Août 98.
[ALSTOM-99]	ALSTOM. <i>Caractéristiques techniques du disjoncteur ARC 812M</i> . Document interne, juin 1999.
[ALSTOM-00]	ALSTOM. <i>Oscillogrammes de coupure ARC 812</i> . Essais au laboratoire de Saint Quentin, plate-forme 100MVA, octobre 2000.
[ALSTOM-01]	ALSTOM. <i>Implantation shelters 1 et 2 – 1114007 – 24412 –M110</i> . Fichier DAO MM110000.dwg, Folio 3, 2001.
[ARRILLAGA-98]	ARRILLAGA, Jos ; SMITH Bruce C ; WATSON Neville R ; WOOD Alan R. <i>Power system harmonic analysis</i> . J. Wiley & Sons, 1998.
[ARRILLAGA-01]	ARRILLAGA, Jos ; WATSON Neville R. <i>Computer modeling of electrical power systems</i> . J. Wiley & Sons, 2001.
[ARRILLAGA-03]	ARRILLAGA, Jos ; WATSON Neville R. <i>Power systems electromagnetic transients simulation</i> . J. Wiley & Sons, 2003.
[BARBER-91]	BARBER, J.P. & CHALLITA, A. <i>Contact transition in metal armatures</i> . IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 27., No. 1, January 1991.
[BATHURST-99]	BATHURST, Graeme N. <i>A Newton solution for the harmonic analysis of power systems with multiple non-linear devices</i> . Thesis presented at the University of Canterbury, Christchurch New Zealand, February 1999.
[BERNOT-99]	BERNOD, François. <i>Machines à courant continu – constitution et fonctionnement</i> . Techniques de l'ingénieur D3555, traité génie électrique, 1999.
[BICKFORD-76]	BICKFORD, J.P. & MULLINEUX, N. & REED, J.R. <i>Computation of Power System Transients</i> . London, UK, Peter Peregrinus, 1976.
[BORDEAUX-96]	BORDEAUX Montrieux, Jean. <i>Systèmes de transport à traction électrique par courant continu ; courants vagabonds ; guide de conception de systèmes</i> . Division COMSIP, CEGELEC, Juin 1996.
[CANDUSSO-02]	CANDUSSO, Denis. <i>Hybridation du groupe électrogène à pile à combustible pour l'alimentation d'un véhicule électrique</i> . Thèse soutenue au LEG, Grenoble, Novembre 2002.
[CARSON-26]	CARSON, J.R. <i>Wave propagation in overhead wires with earth return</i> . Bell System Technical Journal, Vol. 5, 539-544, October 1926.

[CAVEN-91]	CAVEN, R.W. & JALALI, J. <i>Predicting the contact resistance distribution of electrical contacts by modeling the contact interface</i> . Proceedings of the Thirty-Seventh IEEE Holm Conference on Electrical Contacts, October 1991.
[CERTU-00]	CERTU. <i>L'offre française en matière de transports publics – de la desserte urbaine à la desserte régionale</i> . Collection du CERTU, 2000.
[CLAYTON-94]	CLAYTON, R.P. <i>Analysis of multiconductor transmission lines</i> . Series of microwave and optical engineering, Kay Chang series editor, 1994.
[CORNIC-03]	CORNIC, Daniel. P11, Study of 1500 V DC Voltage for LRT. Document interne ALSTOM. Phase 0, IGR_CSNPS-11_D200_CSY+001 rev 1.doc. Mars 2004.
[CRISTINA-89]	CRISTINA, S. & FELIZIANI, M. <i>A finite element technique for multiconductor cable parameters calculation</i> . IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 25, Issue : 4, pp. 2986-2988, July 1989.
[DERI-89]	DERI, A & TEVAN, G & VARJU, G. <i>Calcul du couplage inductif entre lignes de transmissions</i> . Rail International, Novembre 1985.
[DOMMEL-69]	DOMMEL, H.W. <i>Digital computer simulation of electromagnetic transients in single and multiphase networks</i> . IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. 88(4), pp. 388-399, April 1969.
[DOMMEL-85]	DOMMEL, H.W. <i>Overhead line parameters from handbook formulas and computer programs</i> . IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS-104, No. 2, pp. 366-272, February 1985.
[ELBAS-99]	ELBAS. Manual elbas-SINANET®, elbas-WEBANET®, elbas-IMAFEB®. Document interne ALSTOM Transport Systems, 1999.
[EMTP-98]	EMTP by Dommel H.W. & Liu, Tsu-Huei. <i>Electromagnetic transient program theory book</i> . Branch of system engineering, Bonneville Power Administration.
[ESCANE-99]	ESCANE Pierre & Jean-Marie. <i>Réseau électrique linéaire à constantes réparties</i> . Techniques de l'ingénieur, Electrotechnique générale, D1100, Vol. DAB, 1999.
[FECHANT-96]	FECHANT, Louis. <i>Le Contact électrique : Phénomènes physiques et matériaux</i> . Paris, Hermès, p 29-60, 1996.
[FERRI-00]	FERRI, G. <i>Transmission line modelling by ladder networks</i> . Proceedings, 22nd International Conference on Microelectronics, 2000.
[FREY-03]	FREY, D. <i>Convertisseurs haute tension : contribution à l'intégration de la fonction interrupteur</i> . Thèse soutenue au LEG, Grenoble, Juin 2003.



[FURSE-95]	FURSE, C.M. & GANDHI, O.P. <i>Why the DFT is faster than the FFT for FDTD time to frequency domain conversions</i> . IEEE Microwave and Guided Wave, Vol. 5, Issue 10, October 1995.
[GARY-76]	GARY, C. <i>Approche complète de la propagation multifilaire en haute fréquence par utilisation des matrices complexes</i> . EDF, Bulletin de la direction des études et recherches, Série B, Réseaux électriques matériels électriques, 1976.
[GREENWOOD-67]	GREENWOOD, J.A. <i>Constriction resistance and the real area of contact</i> . British Journal of Applied Physics, Vol. 17, 1967.
[GROUD-97]	GROUD, Alain. <i>Contribution à l'analyse des systèmes électrotechniques complexes : méthodes et outils appliqués à l'étude des harmoniques</i> . Thèse soutenue au LEG, Grenoble, Juillet 1997.
[HANNING-01]	HANNING & KAHL. <i>Technical information – Instructions for installation and adjustment – HFP Track circuit</i> . Document interne ALSTOM, Juin 2001.
[HILL-93]	HILL, R.J. & CARPENTER, D.C. <i>Rail track distributed line impedance and admittance: theoretical modeling and experimental results</i> . IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 42, Issue 2, May 1993.
[HOLM-67]	HOLM, Ragnar. <i>Electric contacts : theory and application</i> . Berlin, New York Springer Verlag 1967.
[HOLTZ-89]	HOLTZ, Joachim. <i>The propagation of harmonic currents generated by inverter-fed locomotives in the distributed overhead supply system</i> . IEEE Transactions on Power Electronics, Vol. 4, No. 2, April 1989.
[HUANG-03]	HUANG, Sy-Ruen & CHUNG, Steven Chingyei. <i>A harmonic model for the nonlinearities of single-phase transformer with describing functions</i> . IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 18, No. 3, July 2003.
[IORDACHE-02]	IORDACHE, Marius. <i>Contribution à l'étude des perturbations conduites dans les chaînes de traction ferroviaire. Développement d'une méthode d'analyse harmonique pour l'étude des compatibilités avec les circuits de voie</i> . Thèse soutenue au LGEP, Gif-sur-Yvette, France, Octobre 2002.
[KHATIR-00]	KHATIR, Zoubir. <i>Nouveaux procédés d'alimentation électrique par le sol des systèmes de transports urbains</i> . Revue de l'Electricité et de l'Electronique, n°6, Juin 2000.
[LECONTE-81]	LECONTE, Jacques. <i>Protection contre la corrosion</i> . Techniques de

	l'ingénieur, Machines hydrauliques et thermiques. A830, Vol. BAL, 1981.
[MANISCALO-02]	MANISCALO. <i>Guide de design des systèmes de protection contre les courants vagabonds</i> . CCN Power Supply, ALSTOM, Juin 2002.
[MARTIN-03]	MARTIN, C. & SCHANEN, J.L. & CLAVEL, E. & PASTERCZYK, R. <i>Power integration: electrical analysis of new electrical package</i> . EPE'03, 10 <sup>th</sup> European Conference on Power Electronics and Applications, Toulouse, September 2003.
[MATLAB-04]	MATLAB, Help. <i>Matlab function reference</i> . Aide logicielle, fournie avec la Version 7.0.0.19920 (R14) de MATLAB®, 2004.
[MENGUY-97]	MENGUY, Claude. <i>Mesure des caractéristiques des matériaux isolants solides</i> . Techniques de l'ingénieur, D2310, Août 1997.
[MÖLLERSTEDT-00]	MÖLLERSTEDT, Erik ; Bernhardson, Bo. <i>Out of control because of harmonics – An analysis of the harmonic response of an inverter locomotive</i> . IEEE Control Systems Magazine, Volume 20, Issue 4, pp 70-81, August 2000.
[MORIN-01]	MORIN, Eric. <i>Transition entre deux secteurs conducteurs, V2</i> . Document ALSTOM Transport Systèmes, Novembre 2001.
[MORIN-02]	MORIN, Eric. <i>Comportements dynamiques des réseaux d'alimentation de tramway : simulations de régimes transitoires sur la ligne ALISS de La Rochelle – VI</i> . Document ALSTOM Transport Systèmes, Juin 2002.
[MORIN-03a]	MORIN, E.& CORNIC, D. & MEUNIER, G. & RETIERE, N. & ROUDET, J. <i>Use of a finite elements method to characterize a Multiconductor transmission line problem on a tram ground-powered system</i> . IEEE Compumag, Saratoga, July 2003.
[MORIN-03b]	Morin, Eric. <i>Modélisations fréquentielles de sous-station de traction</i> . Document ALSTOM Transport Systèmes, Réf : CSNPS-14-D200-CSY+001 Rèv 2A, Septembre 2003.
[MORIN-03c]	Morin, Eric. <i>Modélisations fréquentielles de lignes aériennes de contact et de transformateurs</i> . Document ALSTOM Transport Systèmes, Réf : CSNPS-14-D200-CSY+002 Rèv 1A, Décembre 2003.
[MULLER-00]	MULLER, Goerges. <i>Tramways</i> . Techniques de l'ingénieur C4440, traité construction, 2000.
[PANG-88]	PANG, Khee. <i>Cascade synthesis of distributed networks by lumped ladder RC equivalents</i> . IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol. 17, Issue 4, 1988.
[PAPAGIANNIS-00]	PAPAGIANNIS, G.K. & TRIANTAFYLLIDIS, D.G. <i>A one step finite</i>

	<i>element formulation for the modeling of single and double-circuit transmission lines</i> . IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 15, No. 1, February 2000.
[PEDRA-04]	PEDRA Joaquin & CORCOLES Felipe. <i>Harmonic nonlinear transformer modeling</i> . IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 19, No 2, April 2004.
[PERRIN-91]	PERRIN, Jean Paul & VENARD Charles. <i>Transports électriques urbains. Distribution d'énergie, automatismes de contrôle</i> . Techniques de l'ingénieur D5554, traité génie électrique, Juin 1991.
[POLLACZEK-26]	POLLACZEK, F. <i>Über das Feld einer unendlich langen wechselstromdurchflossenen Einfachleitung</i> . Elektrische Nachrichten Technik, 1926.
[POPESCU-99]	POPESCU, Radu-Mugur. <i>Vers de nouvelles méthodes de prédiction des performances CEM dans les convertisseurs d'électronique de puissance</i> . Thèse soutenue au LEG, Grenoble, Novembre 1999.
[POWEREX-04]	POWEREX. RA20 3600A <i>General purpose rectifier</i> . <a href="http://www.pwr.com/pages/search/search_spec.asp?catid=30">http://www.pwr.com/pages/search/search_spec.asp?catid=30</a>
[REVOL-03]	REVOL, Bertrand. <i>Modélisation et optimisation des performances CEM d'une association variateur de vitesse – machine asynchrone</i> . Thèse soutenue au LEG, Grenoble, Novembre 2003.
[ROUBINE-78]	ROUBINE, Elie. <i>Mathématiques pour l'électricien. Matrices et analyse vectorielle</i> . Techniques de l'ingénieur D32, Décembre 1978.
[RUEHLI-72]	RUEHLI, E. <i>Inductance calculation in a complex integrated circuit environment</i> . IBM Journal of Research and Development, pp. 470-481, September 1972.
[SABATE-02]	SABATE, Victor. Centre d'Essais Ferroviaire, sous-station 1500 V CC, harmoniques de tension ( $f < 20$ kHz). Document interne ALSTOM, VPF-CEF_19-08-02_VS, Août 2002.
[SCHEICH-93]	SCHEICH, R. <i>Caractérisation et prédétermination des perturbations électromagnétiques conduites dans les convertisseurs de l'électronique de puissance</i> . Thèse soutenue au LEG, Grenoble, Octobre 1993.
[SIEMENS-99]	SIEMENS. Descriptif du système – <i>Circuit de verrouillage d'aiguille informatisé (MC-WSK)</i> . Document Siemens, Mai 1999.
[SMITH-98]	SMITH, B.C. & ARRILLAGA, J. & WOOD, A.R. & WATSON, N.R. <i>A review of iterative harmonic analysis for AC-DC power systems</i> . IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 13, No. 1, January 1998.
[THURIN-90]	THURIN, Yves. <i>Transports électriques urbains. Distribution,</i>

	<i>équipements de traction</i> . Techniques de l'ingénieur D5553, traité génie électrique, Septembre 1990.
[TRANTAFYLLIDIS-99]	TRANTAFYLLIDIS, D.G. & PAPAGIANNIS, G.K. <i>Calculation of overhead transmission line impedances: a finite element approach</i> . IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 14, No. 1, January 1999.
[TZENG-98]	TZENG, Yii-Shen & WU, Ruay-Nan. <i>Electric network solutions of DC transit systems with inverting substations</i> . IEEE Transactions on Vehicular Technology, Vol. 47, No 4, November 1998.
[VACQUIE-95]	VACQUIE, Serge. <i>Arc électrique</i> . Techniques de l'ingénieur D2870, traité génie électrique, Mars 1995.
[WANG-00]	WANG, Yaw-Juen. <i>Modeling of frequency-dependent impedance of the third rail used in traction power systems</i> . IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 15, No 2, April 2000..
[WANG-01]	WANG, Yaw-Juen & LIU, Shi-Jie. <i>A review of methods for calculation of frequency-dependent impedance of overhead transmission lines</i> . Proceedings National. Science. Council, ROC(A), Vol. 25, No. 6 pp. 329-338, 2001.
[WILLIAMSON-72]	WILLIAMSON, J.B.P. & HUNT, R.T. <i>Asperity persistence and the real area of contact between rough surfaces</i> . Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 327, p.147-157, 1972.
[XIA-82]	XIA, D. & HEYDT, G. <i>Harmonic power flow studies, Part I and II</i> . IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS 101, No. 6, pp. 1257-1270, 1982.