

5T 3



Distribué par
Verteilt durch
Distributed by

ORE

2857

Exposé de la théorie de l'interaction entre la voie et le véhicule de chemin de fer

Mouvement sur une voie en alignement droit

par

A. D. de PATER

Université Technique de Delft, Pays-Bas

Exposé de la théorie de l'interaction entre la voie et le
véhicule de chemin de fer. Mouvement sur une voie en ali-
gnement droit (Laboratoire de Mécanique Technique, Rapport
No. 220)

par

A.D. de Pater

Université Technique de Delft, Pays-Bas.

Sommaire

Pour un véhicule de chemin de fer se déplaçant sur une voie en alignement l'auteur rédige les équations de mouvement. En général, les angles de rotation de la caisse du véhicule sont si faibles qu'on peut remplacer leurs fonctions gonio-métriques par des fonctions tout au plus quadratiques dans les expressions pour les énergies, et par des fonctions tout au plus linéaires dans les équations de mouvement. Abstraction faite de ces simplifications les calculs sont rigoureusement exacts.

Il a été supposé que les deux rails présentent de légères déviations de la forme purement rectiligne, et qu'ils peuvent se déformer dans la direction latérale. D'autre part, le calcul ne se réfère qu'à un véhicule à un seul châssis comprenant tous les essieux sans jeux longitudinaux et latéraux, et dont toutes les roues présentent le même diamètre; les véhicules à bogies, à essieux convergents etc. sont laissés hors considération.

Les calculs sont basés sur la méthode de Lagrange; ils sont nettement simplifiés par l'application de la méthode matricielle. Dans le chapitre 2 ces deux méthodes sont expliquées pour ceux qui ne sont pas au courant.

Dans le chapitre 3, on trouve des considérations géométriques et cinématiques et dans le chapitre 4 sont étudiées la dynamique et plus spécialement les équations de mouvement du système. Nous avons déjà indiqué que ces dernières équations sont déduites à l'aide de la méthode de Lagrange; l'appendice A montre comment on peut déduire ces équations à l'aide des lois de Newton.

Dans les calculs, la relation entre une force de ressort et sa compression, la relation entre la force latérale s'appliquant à la voie et la déviation correspondante, et la relation entre la force tangentielle rail-roue et les vitesses de glissement et de roulement ne sont pas encore spécifiées. Dans le sous-chapitre 46 ces relations (et plus spécialement la dernière) sont considérées plus en détail.

Dans les calculs exposés dans les chapitres 3 et 4, les équations de mouvement sont établies dans la supposition que chaque force s'applique au véhicule dans sa position réelle. Or, il est possible de simplifier considérablement les calculs en supposant que les forces s'appliquent au véhicule se trouvant dans une position centrale par rapport à la voie, comme il est indiqué au chapitre 5. En outre, dans ce dernier chapitre les équations de mouvement sont spécifiées pour le cas spécial où les ressorts se comportent de façon linéaire tant pour l'élasticité que pour l'amortissement, et où la voie se comporte de façon linéaire et n'est pas amortie du tout.

Les équations de mouvement ainsi obtenues sont encore si compliquées, qu'il faut les intégrer à l'aide d'un ordinateur ou les simplifier encore plus. Il est alors souvent avantageux d'introduire des quantités sans dimension, comme il est indiqué dans le sous-chapitre 53. Enfin, on étudie le cas tout à fait linéaire, valable pour des mouvements parasites infiniment petits et pour une voie sans déviations de la forme purement rectiligne, dans le sous-chapitre 54; on y trouve que dans ce dernier cas les équations pour les

déplacements parasites se divisent en deux parties indépendantes l'une de l'autre, l'une contenant les déplacements dits symétriques, et l'autre contenant les déplacements latéraux.

L'étude des équations de mouvement n'a pas été effectuée dans le présent rapport: elle devra faire l'objet d'autres études. En outre, il sera nécessaire de considérer des véhicules ferroviaires plus compliqués ainsi que le comportement d'un véhicule se mouvant dans des courbes de formes diverses.

Darlegung der Theorie der Wechselwirkung zwischen Gleis und Eisenbahnfahrzeug auf einer geraden Strecke (Laboratorium für Angewandte Mechanik, Bericht Nr. 220)

von
A.D. de Pater

Technische Hochschule Delft, Niederlande.

Zusammenfassung

Der Verfasser stellt die Bewegungsgleichungen für ein Fahrzeug, das auf einer geraden Strecke rollt, auf. Im allgemeinen sind die Drehwinkel des Fahrzeugkastens so gering, dass man ihre goniometrischen Funktionen in den Ausdrücken für die Energien durch höchstens quadratische Funktionen und in den Bewegungsgleichungen durch höchstens lineare Funktionen ersetzen kann. Abgesehen von diesen Vereinfachungen sind die Berechnungen vollständig exakt.

Es wurde angenommen, dass die beiden Schienen leichte Abweichungen von der rein geradlinigen Form aufweisen und dass sie sich in seitlicher Richtung verformen können. Ausserdem bezieht sich die Rechnung nur auf ein Fahrzeug mit einem einzigen Rahmen, in dem sämtliche Radsätze ohne Längs- und Seitenspiele untergebracht sind und wo alle Räder den gleichen Durchmesser haben. Fahrzeuge mit Drehgestellen oder Lenkachsen sind ausser Betracht gelassen.

Die Berechnungen fassen auf der Methode von Lagrange und werden durch Anwendung der Matrizenmethode wesentlich vereinfacht. Im Abschnitt 2 werden diese beiden Methoden für Nichteingeweihte erläutert.

Abschnitt 3 ist geometrischen und kinematischen Betrachtungen gewidmet, und im Abschnitt 4 werden die Dynamik und insbesondere die Bewegungsgleichungen des Systems untersucht. Wie schon er-

erwähnt, wurden die letztgenannten Gleichungen mit Hilfe der Methode von Lagrange aufgestellt; Anlage A zeigt, wie man diese Gleichungen mit Hilfe der Newtonschen Gesetze aufstellen kann.

Die Beziehung zwischen einer Federkraft und der Zusammendrückung dieser Feder, die Beziehung zwischen einer auf das Gleis ausgeübten Seitenkraft und der damit verbundenen Verschiebung sowie die Beziehung zwischen der Tangentialkraft zwischen Schiene und Rad und der Gleit- bzw. der Fahrgeschwindigkeit sind in den Berechnungen noch nicht herausgestellt. Im Unterabschnitt 46 werden diese Beziehungen (insbesondere die letztgenannte) näher betrachtet.

In den Berechnungen der Abschnitte 3 und 4 wird für die Bewegungsgleichungen angenommen, dass jede Kraft auf das Fahrzeug in dessen wirklicher Lage einwirkt. Die Berechnungen lassen sich jedoch erheblich vereinfachen durch die Annahme, dass die Kräfte auf ein Fahrzeug einwirken, das sich gegenüber dem Gleis in einer zentralen Lage befindet, wie in Abschnitt 5 angegeben. In diesem Abschnitt wurden die Bewegungsgleichungen zudem für den Sonderfall aufgestellt, wo die Federn sich in bezug auf die Elastizität wie auch auf die Dämpfung linear verhalten und wo das Gleis sich linear verhält und gar nicht gedämpft ist.

Die auf diese Weise erhaltenen Bewegungsgleichungen sind noch derart kompliziert, dass sie mit einer elektronischen Rechenanlage integriert oder noch weiter vereinfacht werden müssen. Es ist daher oft vorteilhaft, dimensionslose Grössen einzuführen, wie im Unterabschnitt 53 angegeben. Schliesslich wird im Unterabschnitt 54 der völlig lineare Fall untersucht, der für unendlich kleine Störbewegungen und für ein Gleis ohne Abweichungen von der rein geradlinigen Form gilt. Es stellt sich heraus, dass im letztgenannten Falle die Gleichungen der Störbewegungen in zwei voneinander unabhängige Teile zerfallen,

wovon der eine die sogenannten symmetrischen Bewegungen und der andere die seitlichen Bewegungen umfasst.

Die Bewegungsgleichungen wurden im vorliegenden Bericht nicht untersucht; sie müssen den Gegenstand weiterer Untersuchungen bilden. Ferner wird es notwendig sein, kompliziertere Eisenbahnfahrzeuge sowie das Verhalten eines Fahrzeugs, das sich in Gleiskrümmungen verschiedener Form bewegt, zu untersuchen.

Exposé on the theory pertaining to the interaction between
track and railway vehicle. Movements prevailing in a straight
track section (Laboratory of technical Mechanics, Report No.
220)

by
A.D. de Pater

Delft Technical University, Netherlands.

Summary

The author has established the equations pertaining to the movement of a railway vehicle moving over a straight track. The rotation angles of the vehicle body are generally so small that their trigonometric functions can be replaced, by at most quadratic functions in the expressions pertaining to the energies and by linear functions in the equations of motion. Apart from these simplifications, the calculations are completely exact.

It has been assumed that the two rails have slight deviations from the purely rectilinear shape, and that they may be deformed in the lateral direction. On the other hand, the calculation only refers to one vehicle with a single frame containing all the wheel sets without longitudinal and lateral play, all the wheels of which have the same diameter; bogie vehicles, vehicles with adjustable axles and such-like are left unconsidered.

The calculations are based on the Lagrange method; they are considerably simplified by the application of the matrix calculus method. In chapter 2, these two methods have been explained for those who are not familiar with them.

Chapter 3 contains geometrical and kinematical considerations and in chapter 4 a study is made of the dynamics and more particularly of the equations of motion of the system. As already stated, these latter equations have been established by means of the Lagrange method; Appendix A shows how these equations can be established by means of the laws of Newton.

The relation between a spring force and its compression, the relation between the lateral force exerted on the track and the corresponding deviation and also the relation between the tangential force between rail and wheel and the sliding and rolling velocities have not yet been specified in the calculations. In section 46 these relations (and more particularly the latter) have been considered in greater detail.

In the calculations contained in chapters 3 and 4, the equations of motion have been established in the assumption that each force applies on the vehicle in its real position. It is, however, possible to simplify the calculations considerably by assuming that the forces apply on the vehicle finding itself in a central position in relation to the track, as indicated in chapter 5. Moreover, in this chapter the equations of motion have been established for the special case where the springs present a linear behaviour both as regards the elasticity and the damping, and the track presents a linear behaviour and is not damped at all.

The equations of motion thus obtained are still so complicated that they must be integrated by means of an electronic computer or require a further simplification. It is then often advantageous to introduce dimensionless quantities, as indicated in section 53. Finally, in section 54, a study is made of the purely linear case, valid for infinitely small parasitic movements and for a track without any deviations from the purely rectilinear shape; it has become apparent

here that in this latter case the equations pertaining to the parasitic movements can be divided into two parts independent of each other, one including the so-called symmetrical displacements and the other the lateral displacements.

No study of the equations of motion has been made in the present report; it will form the subject of other studies. It will, moreover, be necessary to consider more complicated railway vehicles and also the behaviour of a vehicle running through curves of various forms.

Table des matières.

<u>1.</u>	Introduction	p. 3
<u>2.</u>	Généralités	4
<u>21.</u>	Notations	4
<u>22.</u>	Méthode matricielle	13
<u>23.</u>	Equations de Lagrange	18
<u>3.</u>	Observations géométriques et cinématiques	18
<u>31.</u>	Coordonnées	19
<u>32.</u>	La coopération entre caisse et essieu	24
<u>33.</u>	La coopération entre voie et essieu	25
<u>331.</u>	Relations entre les quantités fixant le déplacement d'un essieu et les endroits des points de contact rail-roue	26
<u>332.</u>	Directions normales et tangentielles; rayons de courbure	33
<u>34.</u>	Rotations virtuelles	36
<u>35.</u>	Observations cinématiques	40
<u>4.</u>	Observations dynamiques	44
<u>41.</u>	Aperçu des forces	44
<u>42.</u>	Energie potentielle	47
<u>43.</u>	Forces généralisées	48
<u>44.</u>	Energie cinétique	53
<u>45.</u>	Equations de mouvement	55
<u>46.</u>	Relations entre les forces de ressort, les forces de rappel du rail et de la roue, les forces aux points de contact rail-roue et les coordonnées du système	58
<u>5.</u>	Simplification des équations de mouvement	63
<u>51.</u>	Théorie de premier ordre	64
<u>52.</u>	Le véhicule avec des ressorts linéaires à amortissement visqueux	71
<u>53.</u>	Introduction de quantités sans dimension	77
<u>54.</u>	Cas linéaire	85
<u>6.</u>	Observations finales	92
<u>A.</u>	Appendice	93

1. Introduction. Dans le domaine de la mécanique de l'interaction entre la voie et le véhicule de chemin de fer en mouvement nous pouvons distinguer quelques problèmes très importants:

- a) le comportement des véhicules circulant de façon stationnaire en courbe; ce comportement a surtout été étudié en Allemagne et en Suisse par Uebelacker [1], Heumann [2], Borgeaud [3] et Müller [4], puis en France par Lévi [5];
- b) le comportement des véhicules circulant dans une voie en alignement; il s'agit surtout du mouvement de lacet, qui a été étudié par Carter [6], Rocard [7], Lévi [8], Cain [9], Davies [10] et Royer [11];
- c) le comportement dynamique des véhicules circulant en courbe, qui a été peu étudié [12] jusqu'à présent;
- d) l'entrée en courbe et la sortie d'une courbe avec des courbes de transitions éventuelles: voir les travaux de Uebelacker [13], Heumann [14], Müller [15] et de l'auteur [16];
- e) la question du déraillement, qui a été étudiée par Chartet [17] et Müller [18].

Dans ce résumé nous n'avons mentionné que les travaux les plus importants entrepris par les investigateurs dans le domaine de la mécanique de l'interaction voie-véhicule.

Tous ces investigateurs ont traité une partie du problème de la dite interaction. Dans le cadre des travaux du Comité d'Experts C9 de l'Office de Recherches et d'Essais (O.R.E.) de l'Union Internationale des Chemins de fer [U.I.C.] nous avons tenté de rédiger un résumé des bases d'une théorie plus complète traitant le mouvement sur une voie en alignement. Dans l'avenir nous espérons de rédiger un résumé analogue pour le mouvement en courbe.

Dans notre étude nous tiendrons plus spécialement compte des points suivants:

- a) le profil des rails et celui des bandages ont une forme quelconque;
- b) la relation entre la force de friction d'un contact et la force normale au rail et au bandage se trouvant en contact est plus générale que celle d'un frottement sec (Heumann) ou d'un frottement proportionnel à la vitesse relative de la roue par rapport au rail (Carter, Rocard);

- c) les roues et les rails peuvent présenter des déviations latérales à cause de leur élasticité et de la position irrégulière de la voie;
- d) les essieux tournent avec de grandes vitesses angulaires, de sorte que les effets gyroscopiques ne sont pas négligeables à priori.

Par contre nous nous bornerons au cas:

- a) où le véhicule ne présente qu'un seul châssis groupant tous les essieux;
- b) pour lequel on peut négliger les jeux entre les boîtes d'essieux et les glissières;
- c) où le véhicule est symétrique par rapport à un plan qui - le véhicule se trouvant au repos dans sa position centrale sur une voie parfaite en alignement droit - coïncide avec le plan vertical longitudinal de la voie;
- d) où les diamètres des roues sont égaux l'un à l'autre, et le profil d'un rail conserve sa forme le long d'un rail.

2. Généralités. Avant de traiter le problème proprement dit, nous nous occuperons avec quelques objets de nature générale. Nous exposerons en bref la méthode matricielle que nous avons utilisée dans l'étude présent, et nous décrirons la méthode des équations de Lagrange. On trouve en plus dans le chapitre présent une liste des notations utilisées.

21. Notations. Un essieu est affecté de l'indice i ($i=1, \dots, n$). Puis nous distinguerons partout dans ce rapport la quantité relative au côté droit du véhicule (vu dans le sens de marche) de la quantité analogue relative au côté gauche respectivement par les valeurs 1 et 2 de l'indice j ajouté à l'indice bas de l'essieu. Une combinaison \pm ou \mp de signes signifie que le signe supérieur se réfère au côté droit et le signe inférieur au côté gauche.

Un vecteur est indiqué par une lettre surmontée d'un trait (en imprimé par une lettre grasse).

Les autres notations sont données ci-dessous. Un nombre entre parenthèses indiquer le chapitre où la quantité considérée se présente pour la première fois.

- a_0 (31) coordonnée $o^{\mathbb{X}}x^{\mathbb{X}}$ du centre de masses o_0 de la caisse par rapport au trièdre ($o^{\mathbb{X}}, x^{\mathbb{X}}, y^{\mathbb{X}}, z^{\mathbb{X}}$)
 a_i (31) coordonnée $o^{\mathbb{X}}x^{\mathbb{X}}$ du centre de masses $o_i^{\mathbb{X}}$ de l'essieu i par rapport à ce trièdre
 a_{ij} (46) demi-axe selon la direction ox de l'ellipse de l'aire de contact
 b (33) demi-distance des points de contact A_{ij}
 b_i (32) demi-distance entre les deux boîtes du i^{me} essieu; nous admettons que la demi-distance entre les deux ressorts de cet essieu est aussi égale à b_i
 b_{ij} (46) demi-axe selon la direction oy de l'ellipse de l'aire de contact
 c (52) rigidité totale des ressorts
 c_0 (46) somme des rigidités des deux rails à l'endroit d'un essieu
 $c_0^{\mathbb{X}}$ (46) somme des rigidités des deux roues
 c_i (46) somme des rigidités des deux ressorts du i^{me} essieu
 c_y (46) rigidité latérale de la voie et des essieux (somme des rigidités au côté droit et au côté gauche)
 $c_w, c_{w\chi}$ etc. (53) coefficients de $w^2, w\chi$ etc. dans l'expression de l'énergie potentielle sans dimension
 d_1 (51) valeur moyenne de la somme des déviations latérales du rail et de la roue au côté droit et de la somme des déviations latérales au côté gauche
 e_1 (51) demi-différence de la somme des déviations latérales du rail et de la roue au côté droit et de la somme des déviations latérales au côté gauche
 e_{ij} (33) déviation latérale du rail
 $e_{ij}^{\mathbb{X}}$ (33) déviation latérale du bandage
 $f(\gamma)$ (331) fonction déterminant le profil du rail
 $f^{\mathbb{X}}(\gamma^{\mathbb{X}})$ (331) fonction déterminant le profil du bandage
 f_{ij} (32) flexion sous charge d'un ressort du i^{me} essieu
 h (31) distance du centre de masses o_0 de la caisse jusqu'au plan ($x^{\mathbb{X}}, o^{\mathbb{X}}, y^{\mathbb{X}}$)
 $h_{1,2}$ (43) distance du point d'application $B_{1,2}$ des forces
 $L_{1,2}, D_{1,2}, V_{1,2}$ jusqu'au plan ($x^{\mathbb{X}}, o^{\mathbb{X}}, y^{\mathbb{X}}$)

$i(3)$ indice de l'essieu

$j(3)$ indice du côté

$k(23)$ indice d'une coordonnée nécessaire

$k(52)$ amortissement total des ressorts

$k_o(46)$ somme des amortissements des deux rails à l'endroit d'un essieu

$k_o^{\times}(46)$ somme des rigidités des deux roues

$k_i(46)$ somme des amortissements des deux ressorts (à amortissement visqueux) de i^{me} essieu

k_w, k_{wx} etc. (53) coefficients d'amortissement se présentant dans les expressions pour les forces d'amortissement de ressort sans dimension

$l(53)$ longueur de comparaison

$l_{1,2}(43)$ coordonnée $o^{\times}x^{\times}$ du point d'application $B_{1,2}$ des forces

$L_{1,2}, D_{1,2}, V_{1,2}$

l_c, l_{ca}, l_{cb} (52) longueurs annexes aux longueurs a_i et b_i et aux rigidités c_i

l_k, l_{ka}, l_{kb} (52) longueurs annexes aux longueurs a_i et b_i et aux coefficients de frottement k_i

$m(23)$ nombre des coordonnées nécessaires

m_s^{\times}, m_w etc. (53) coefficients de $\dot{s}^{\times 2}, \dot{w}^2$ etc. dans l'expression de l'énergie cinétique sans dimension

m_{ij}, n_{ij} (46) quantités auxiliaires se présentant dans le calcul des demi-axes de l'ellipse de l'aire de contact

$n(3)$ nombre d'essieux

$n_{ij}(331)$ normale au rail au point de contact

$n_{ij}^{\times}(331)$ normale au bandage au point de contact

$o, o^{\times}(31)$ voir x, x^{\times}

$o_o(31)$ centre de masses de la caisse

$o_i(31)$ voir x_i, x_i^{\times}

$o_i^{\times}(31)$ centre de masse du i^{me} essieu

$\bar{p}(31)$ vecteur avec les composantes $0, v, w$

$\bar{p}_i(31)$ vecteur avec les composantes u_i, v_i, w_i

$q_k(23)$ coordonnée nécessaire

$r(331)$ rayon du cercle de roulement

$\bar{r}(31)$ vecteur avec les composantes x, y, z

$\bar{r}^{\times}(31)$ vecteur avec les composantes $x^{\times}, y^{\times}, z^{\times}$

$\bar{r}_0^{\times}(35)$ vecteur indiquant le centre de masses o_0 de la caisse

$\bar{r}_i(31)$ vecteur avec les composantes x_i, y_i, z_i

$\bar{r}_i^{\times}(31)$ vecteur avec les composantes $x_i^{\times}, y_i^{\times}, z_i^{\times}$

$\bar{r}_i^{\times\times}(31)$ vecteur avec les composantes $x_i^{\times\times}, y_i^{\times\times}, z_i^{\times\times}$

$s(31)$ abscisse le long de la voie

$s^{\times}(51)$ somme de s et u

s_{go}, s_{gi} etc. (32) déplacements se rapportant respectivement aux forces G_0, G_i etc.

$t(23)$ temps

$t_{xij}, t_{yij}(332)$ tangentes au rail dans la direction de ses rayons de courbure principaux.

$t_{xij}^{\times}, t_{yij}^{\times}(332)$ tangentes aux bandages dans la direction de ses rayons de courbure principaux

$u(51)$ quantité auxiliaire se rapportant au déplacement dans la direction ox

$v, w(31)$ déplacements de o^{\times} dans les directions oy et oz

$u_i, v_i, w_i(31)$ composantes du déplacement de o_i^{\times} par rapport au trièdre (o_i, x_i, y_i, z_i)

$x, y, z(31)$ axes d'un trièdre de référence d'origine o se mouvant le long de la voie

$x^{\times}, y^{\times}, z^{\times}(31)$ axes d'un trièdre d'origine o^{\times} fixé à la caisse

$x_0^{\times}, y_0^{\times}, z_0^{\times}(31)$ coordonnées du centre de masses de la caisse par rapport au trièdre $(o^{\times}, x^{\times}, y^{\times}, z^{\times})$

$x_i, y_i, z_i(31)$ axes d'un trièdre de référence d'origine o_i se mouvant le long de la voie

$x_i^{\times}, y_i^{\times}, z_i^{\times}(31)$ axes d'un trièdre d'origine o_i^{\times} dont l'axe $o_i^{\times}y_i^{\times}$ coïncide avec l'axe de révolution du i^{me} essieu

$x_1^{xx}, y_1^{xx}, z_1^{xx}$ (31) axes d'un trièdre d'origine o_1^x fixé au 1^{me} essieu

y_{1j} (331) différence de η_{1j}^x et η_{1j}

z_{1j} (331) différence de ξ_{1j}^x et ξ_{1j}

A (54) coefficient sans dimension se rapportant au coefficient C

\bar{A} (31) matrice des cosinus de direction du trièdre (o^x, x^x, y^x, z^x) par rapport au trièdre (o, x, y, z)

$\bar{A}_\varphi, \bar{A}_\chi, \bar{A}_\psi$ (31) composantes de la matrice \bar{A}

\bar{A}_1 (31) matrice des cosinus de direction du trièdre $(o_1^x, x_1^x, y_1^x, z_1^x)$ par rapport au trièdre (o_1, x_1, y_1, z_1)

$\bar{A}_{\varphi 1}, \bar{A}_{\chi 1}, \bar{A}_{\psi 1}$ (31) composantes de la matrice \bar{A}_1

A_{1j} (33) point de contact d'un bandage au rail

$A_{oi j}$ (33) point de contact d'un bandage au rail, l'essieu se trouvant au repos dans une position centrale sur une voie parfaite

$B_{1,2}$ (41) points d'application des forces $L_{1,2}, D_{1,2}, V_{1,2}$

B_1 (31) matrice des cosinus de direction du trièdre $(o_1^x, x_1^{xx}, y_1^{xx}, z_1^{xx})$ par rapport au trièdre (o_1, x_1, y_1, z_1)

C (54) coefficient de rappel sans dimension à cause du creux des bandages

$D_{1,2}$ (41) force latérale s'appliquant à la caisse

D_1 (46) force de rappel se rapportant à la déviation d_1

E (46) module d'élasticité

$E_i(46)$ force de rappel se rapportant à la déviation e_i

$E_{oi}(46)$ valeur de la force E_{ij} , le véhicule se trouvant au repos dans une position centrale sur une voie parfaite

$E_{oi}^*(46)$ valeur de la force E_{ij}^* dans ce cas

$E_{ij}(41)$ force de rappel se rapportant à la déviation e_{ij}

$E_{ij}^*(41)$ force de rappel se rapportant à la déviation e_{ij}^*

$F_{oi}(45)$ force de compression d'un ressort du i^{me} essieu, le véhicule se trouvant au repos dans une position centrale sur une voie parfaite

$F_{ij}(41)$ force de compression d'un ressort du i^{me} essieu

$F_{ij}(\xi_{ij}, \eta_{ij}, \zeta_{ij})(331)$ fonction déterminant la surface d'un rail

$F_{ij}^*(\xi_{ij}^*, \eta_{ij}^*, \zeta_{ij}^*)(331)$ fonction déterminant la surface d'un bandage

$G(44)$ poids total du véhicule

$G_o(41)$ poids de la caisse

$G_i(41)$ poids du i^{me} essieu

$H_{xij}, H_{yi}(41)$ forces entre caisse et i^{me} essieu dans les directions o^*x^* et o^*y^*

$I(31)$ matrice unitaire

$I(44)$ somme des moments d'inertie I_{yi} des essieux

$I_x, I_y(44)$ moments d'inertie de la caisse autour des axes o^*x^* et o^*y^*

$I_y^*(52)$ moment d'inertie de la caisse autour d'une axe parallèle à l'axe o^*y^*

$I_z(44)$ moment d'inertie du véhicule total autour de l'axe o^*z^*

T_i (44) énergie cinétique du i^{me} essieu

T_{ij} (41) force tangentielle entre roue et rail

T_{xij}, T_{yij} (41) composantes de la force tangentielle entre roue et rail dans les directions t_{xij}, t_{yij}

U (23) énergie potentielle

U_a, U_b (52) énergies potentielles se référant respectivement aux mouvements symétrique et latéral

V (52) vitesse moyenne du véhicule

$V_{1,2}$ (41) force verticale s'appliquant à la caisse

V_o (35) vitesse du centre de masses o_o

V_i (35) vitesse des centres de masses o_i

V_{xo}, V_{yo}, V_{zo} (35) composantes selon ox, oy, oz de la vitesse V_o

V_{xi}, V_{yi}, V_{zi} (35) composantes selon $o_i x_i, o_i y_i, o_i z_i$ de la vitesse V_i

V_{ij} (35) vitesse du rail au point A_{ij}

V_{ij}^* (35) vitesse du bandage au point A_{ij}

W (53) vitesse de comparaison

W_{ij} (35) vitesse du bandage par rapport au rail au point A_{ij}

$W_{nij}, W_{txij}, W_{tyij}$ (35) composantes de la vitesse relative du bandage par rapport au rail au point A_{ij} dans les directions n_{ij}, t_{xij}, t_{yij} respectivement

X_{ij}, Y_{ij} (41) composantes de la force rail-roue au point de contact A_{ij} dans les directions $o_i x_i, o_i y_i$

α_i (53) rapport a_i/l

α_{ij} (332) angle entre les directions t_{xij} et t_{xij}^*

β (53) rapport b/l

β_i (331) angle indiquant le dévers de la voie

γ_o (54) valeur de γ_{ij} dans la position centrale

γ_{ij} (331) arc tg de la dérivée de $f(\eta)$ par rapport à η au point de contact A_{ij}

γ_{ij}^* (331) arc tg de la dérivée de $f^*(\eta^*)$ par rapport à η^* au point de contact A_{ij}

δ (34) symbole indiquant un déplacement virtuel

$\bar{\theta}$ (34) angle de rotation de la caisse par rapport au trièdre (o, x, y, z)

$\theta_x, \theta_y, \theta_z$ (34) composantes de $\bar{\theta}$ selon les axes ox, oy, oz

$\bar{\theta}_i$ (34) vecteur par rapport au trièdre (o_i, x_i, y_i, z_i) de l'angle de rotation du i^{me} essieu par rapport au trièdre (o_i, x_i, y_i, z_i)

$\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ (34) composantes de $\bar{\theta}_i$ selon les axes $o_i x_i, o_i y_i, o_i z_i$

$\bar{\theta}_{mi}$ (43) vecteur par rapport au trièdre (o_i, x_i, y_i, z_i) de l'angle de rotation du i^{me} essieu par rapport à la caisse

ξ, η (31) axes vertical et latéral d'un trièdre fixe d'origine ω

ξ_i, η_i (331) coordonnées indiquant l'axe de la voie

ξ_{ij}, η_{ij} (331) coordonnées indiquant le déplacement de A_{ij} dans les directions $o_i z_i, o_i y_i$

ξ_{ij}^*, η_{ij}^* (331) coordonnées indiquant le déplacement de A_{ij} dans les directions $o_i^* z_i^*, o_i^* y_i^*$

χ_{oi} (53) valeur de χ_{ij} dans une position centrale du véhicule

χ_{ij} (46) coefficient de pseudo-glissement

χ_{xij}, χ_{yij} (46) coefficients de pseudo-glissement dans les directions t_{xij}, t_{yij}

μ (46) coefficient de frottement

ν (46) constante de Poisson

ξ (31) axe longitudinal d'un trièdre fixe d'origine ω

ξ_{ij} (331) coordonnée indiquant le déplacement de A_{ij} dans la direction $o_i x_i$

ξ_{ij}^* (331) coordonnée indiquant le déplacement de A_{ij} dans la direction $o_i^* x_i^*$

π (46) rapport de la circonférence du cercle à son diamètre

$\bar{\rho}$ (31) vecteur avec les composantes ξ, η, ξ

$\bar{\rho}_o$ (31) vecteur du point o

ρ_o, ρ_o^* (54) valeurs de ρ_{yij} et ρ_{yij}^* dans une position centrale

ρ_i (53) rapport de la charge de l'essieu i et le poids total

$\bar{\rho}_i$ (31) vecteur par rapport au trièdre (ω, ξ, η, ξ) d'un point quelconque se rapportant au i^{me} essieu

$\bar{\rho}_{oi}$ (31) vecteur du point o_i

ρ_{xij}, ρ_{yij} (332) rayons de courbure principaux du rail en A_{ij}

$\rho_{xij}^*, \rho_{yij}^*$ (332) rayons de courbure principaux du bandage en A_{ij}

τ_{xij}, τ_{yij} (46) forces tangentielles réduites

$\bar{v}_{ij}, v_{xij}, v_{yij}$ (46) glissement réduit et ses composantes

φ, χ, ψ (31) rotations de la caisse autour des axes ox, oy, oz

φ_i, ψ_i (31) angles de rotation du trièdre $(o_i^{\mathbf{x}}, x_i^{\mathbf{x}}, y_i^{\mathbf{x}}, z_i^{\mathbf{x}})$ autour des axes $o_i x_i, o_i z_i$

χ_i (34) angle de rotation du i^{me} essieu

$\chi_i^{\mathbf{x}}$ (31) angle total de rotation du i^{me} essieu

χ_{ij} , (331) angle du rail avec le plan (x_i, o_i, y_i)

ψ_{ij} (331) angle du rail avec le plan (x_i, o_i, z_i)

ψ_{ij} (46) angle auxiliaire dans le calcul des demi-axes a_{ij} et b_{ij}

ω (31) voir ξ

$\bar{\omega}, \omega_x, \omega_y, \omega_z$ (35) vecteur par rapport au trièdre (o, x, y, z) de la vitesse angulaire de la caisse et ses composantes

$\bar{\omega}_i, \omega_{xi}, \omega_{yi}, \omega_{zi}$ (35) vecteur par rapport au trièdre (o_i, x_i, y_i, z_i) de la vitesse angulaire du i^{me} essieu et ses composantes

$\bar{\omega}_i^{\mathbf{x}}, \omega_{xi}^{\mathbf{x}}, \omega_{yi}^{\mathbf{x}}, \omega_{zi}^{\mathbf{x}}$ (35) vecteur par rapport au trièdre $(o_i^{\mathbf{x}}, x_i^{\mathbf{x}}, y_i^{\mathbf{x}}, z_i^{\mathbf{x}})$ de la vitesse angulaire du i^{me} essieu et ses composantes

ω_{nij} (35) composante de la vitesse angulaire du i^{me} essieu selon l'axe n_{ij}

$\omega_w, \omega_\varphi, \omega_\chi$ (53) fréquences propres du véhicule en arrêt

Γ (54) angle d'inclinaison effectif

22. Méthode matricielle. Considérons un trièdre dextrogyre fixe $(\omega, \xi, \eta, \zeta)$ et un trièdre dextrogyre mouvant (o, x, y, z) , dont l'origine o présente les coordonnées ξ_o, η_o, ζ_o dans le système fixe. Un point P avec les coordonnées x, y, z dans le système mouvant présente les coordonnées

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \xi_o + x \cos(x, \xi) + y \cos(y, \xi) + z \cos(z, \xi), \\ \eta &= \eta_o + x \cos(x, \eta) + y \cos(y, \eta) + z \cos(z, \eta), \\ \zeta &= \zeta_o + x \cos(x, \zeta) + y \cos(y, \zeta) + z \cos(z, \zeta) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

par rapport au système fixe.

Ecrivons maintenant les formules (1) sous la forme

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(x, \xi) & \cos(y, \xi) & \cos(z, \xi) \\ \cos(x, \eta) & \cos(y, \eta) & \cos(z, \eta) \\ \cos(x, \zeta) & \cos(y, \zeta) & \cos(z, \zeta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2)$$

On désigne les quantités

$$\bar{\rho} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \bar{\rho}_0 = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix}, \quad \bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (3)$$

comme "vecteurs colonnes", tandis qu'on appelle la quantité

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \cos(x, \xi) & \cos(y, \xi) & \cos(z, \xi) \\ \cos(x, \eta) & \cos(y, \eta) & \cos(z, \eta) \\ \cos(x, \zeta) & \cos(y, \zeta) & \cos(z, \zeta) \end{pmatrix} \quad (4)$$

"une matrice carrée". Dans notre cas les trois vecteurs présentent chacun 3 éléments, et la matrice possède $3 \times 3 = 9$ éléments; en général le nombre des éléments d'un vecteur et le nombre des lignes ainsi que celui des colonnes d'une matrice sont quelconques. La règle pour la multiplication d'une matrice avec un vecteur colonnes se trouve aisément en comparant les formules (1) et (2).

Avec (3) la formule (1) s'écrit sous la forme simple

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{A}\bar{r}. \quad (5)$$

En général on peut traiter les vecteurs et les matrices comme des quantités algébriques. Cependant il faut tenir compte du fait que la multiplication n'est pas commutative, de sorte qu'il est impossible de changer les deux facteurs d'un produit.

Dans la formule (4) les neuf cosinus sont les cosinus de direction des axes du trièdre mouvant par rapport au trièdre fixe. Ces cosinus se calculent en introduisant les trois trièdres auxiliaires $(0, x_1, y_1, z_1)$, $(0, x_2, y_2, z_2)$ et $(0, x_3, y_3, z_3)$, avec les vecteurs

$$\bar{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \bar{r}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}, \quad \bar{r}_3 = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \quad (6)$$

y appartenant. Le trièdre (o, x_3, y_3, z_3) à l'axe oz_3 commun avec l'axe oz , de sorte que la transformation du trièdre (o, x, y, z) au trièdre (o, x_3, y_3, z_3) s'écrit sous la forme

$$\bar{r}_3 = \bar{A}_\psi \bar{r}, \quad (7^a)$$

avec

$$\bar{A}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (8^a)$$

ψ étant l'angle entre les axes ox et ox_3 . La transformation (7^a) revient à ce qu'on tourne le trièdre (o, x, y, z) sur un angle ψ autour l'axe oz , le sens de rotation étant négatif.

De même la transformation du trièdre (o, x_3, y_3, z_3) au trièdre (o, x_2, y_2, z_2) s'écrit

$$\bar{r}_2 = \bar{A}_\varphi \bar{r}_3, \quad (7^b)$$

avec

$$\bar{A}_\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad (8^b)$$

et

$$\bar{r}_1 = \bar{A}_\chi \bar{r}_2, \quad (7^c)$$

avec

$$\bar{A}_\chi = \begin{pmatrix} \cos\chi & 0 & \sin\chi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\chi & 0 & \cos\chi \end{pmatrix}. \quad (8^c)$$

Choisissons maintenant les angles φ, χ, ψ de telle sorte que le trièdre (o, x_1, y_1, z_1) est parallèle au trièdre fixe (o, ξ, η, ζ) . On peut alors écrire

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r}_1, \quad (9)$$

de sorte qu'aussi

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{A}_\chi \bar{r}_2 = \bar{\rho}_0 + \bar{A}_\chi \bar{A}_\varphi \bar{r}_3 = \bar{\rho}_0 + \bar{A}_\chi \bar{A}_\varphi \bar{r}_3 = \bar{\rho}_0 + \bar{A}_\chi \bar{A}_\varphi \bar{A}_\psi \bar{r}. \quad (10)$$

En comparant (5) et (10) on trouve

$$\bar{A} = \bar{A}_\chi \bar{A}_\varphi \bar{A}_\psi. \quad (11)$$

Les éléments de \bar{A} se trouvent ainsi à l'aide des règles pour la multiplication de deux matrices $n \times n$:

$$\bar{c} = \bar{A} \bar{B} \quad (12)$$

avec

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}. \quad (13)$$

Nous donneront le résultat dans la formule (31,9) du chapitre 31.

Les angles φ, χ, ψ sont appelés "angles d'Euler". A noter que les éléments de \bar{A} dépendent de la suite des trois rotations. La suite que nous avons pris, conduit dans les calculs ultérieurs aux formules les plus simples.

On vérifie sans peine que l'inverse de la formule (5) s'écrit

$$\bar{r} = \tilde{\bar{A}} (\bar{\rho} - \bar{\rho}_0). \quad (14)$$

Ici $\tilde{\bar{A}}$ représente la matrice transposée de \bar{A} , c. à d. que son élément \tilde{a}_{ij} est égale à

$$\tilde{a}_{ij} = a_{ji}. \quad (15)$$

Il existe aussi encore la matrice inverse \bar{A}^{-1} de \bar{A} , qui déterminée par la condition

$$\bar{A} \bar{A}^{-1} = \bar{I}, \quad (16^a)$$

\bar{I} étant la matrice unitaire

$$\bar{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

On voit aisément que la matrice inverse \bar{A}^{-1} satisfait aussi à la relation

$$\bar{A}^{-1} \bar{A} = \bar{I}. \quad (16^b)$$

Or, les éléments de la matrice \bar{A} (comme les éléments des matrices \bar{A}_φ , \bar{A}_χ , \bar{A}_ψ) étant des cosinus de direction, satisfaisant aux relations

$$\begin{aligned} \cos^2(x, \xi) + \cos^2(y, \xi) + \cos^2(z, \xi) &= 1 \text{ cycl.}, \\ \cos(x, \xi)\cos(x, \eta) + \cos(y, \xi)\cos(y, \eta) + \cos(z, \xi)\cos(z, \eta) &= 0 \text{ cycl.}, \end{aligned} \quad (18)$$

on trouve sans peine que

$$\bar{A} \tilde{\bar{A}} = \bar{I}; \quad (19)$$

de la comparaison de (16^a) et (19) on tire

$$\tilde{\bar{A}} = \bar{A}^{-1}. \quad (20)$$

Une matrice qui possède la propriété (20), est appelée "matrice orthogonale". Avec (20) on peut écrire au lieu de (14)

$$\bar{r} = \bar{A}^{-1} (\bar{\rho} - \bar{\rho}_0). \quad (21)$$

Soit \bar{B} la matrice

$$\bar{B} = \bar{B}_1 \bar{B}_2, \quad (22)$$

\bar{B} , \bar{B}_1 et \bar{B}_2 étant des matrices orthogonales. En "prémultipliant" les deux membres de (22) avec \bar{B}_1^{-1} et \bar{B}_2^{-1} successivement, on trouve

$$\bar{B}_1^{-1} \bar{B} = \bar{B}_2$$

et

$$\bar{B}_2^{-1} \bar{B}_1^{-1} \bar{B} = \bar{I}. \quad (23)$$

En comparant (16^b) et (23) on trouve

$$\bar{B}^{-1} = (\bar{B}_1 \bar{B}_2)^{-1} = \bar{B}_2^{-1} \bar{B}_1^{-1}, \quad (24)$$

de sorte que la matrice inverse de \bar{A} (11) est égale à

$$\bar{A}^{-1} = (\bar{A}_\chi \bar{A}_\varphi \bar{A}_\psi)^{-1} = \bar{A}_\psi^{-1} \bar{A}_\varphi^{-1} \bar{A}_\chi^{-1}. \quad (25)$$

Observons enfin qu'on peut appliquer le calcul différentielle dans le calcul matriciel. C'est pourquoi selon (5)

$$\dot{\bar{\rho}} = \dot{\bar{\rho}}_0 + \dot{\bar{A}} \bar{r} + \bar{A} \dot{\bar{r}}, \quad (26)$$

tandis que selon (11)

$$\dot{\bar{A}} = \dot{\bar{A}}_{\chi} \bar{A}_{\varphi} \bar{A}_{\psi} + \bar{A}_{\chi} \dot{\bar{A}}_{\varphi} \bar{A}_{\psi} + \bar{A}_{\chi} \bar{A}_{\varphi} \dot{\bar{A}}_{\psi} = \frac{d\bar{A}_{\chi}}{d\chi} \bar{A}_{\varphi} \bar{A}_{\psi} \dot{\chi} + \bar{A}_{\chi} \frac{d\bar{A}_{\varphi}}{d\varphi} \bar{A}_{\psi} \dot{\varphi} + \bar{A}_{\chi} \bar{A}_{\varphi} \frac{d\bar{A}_{\psi}}{d\psi} \dot{\psi} \quad (27)$$

23. Equations de Lagrange. Considérons un système mécanique à m degrés de liberté et m coordonnées généralisées. Soient

q_k la k^{me} coordonnée généralisée ou coordonnée nécessaire;

Q_k la k^{me} force généralisée;

T l'énergie cinétique;

U l'énergie potentielle;

$$L = T - U \quad (1)$$

la fonction de Lagrange (qu'on appelle aussi potentiel cinétique ou énergie libre) du système.

Les équations de mouvement s'écrivent alors sous la forme

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k \quad (k=1, \dots, m) \quad (2)$$

Il faut noter que les forces généralisées contiennent en tout cas les forces qui ne sont pas comprises dans l'énergie potentielle. Les forces qui peuvent être dérivées d'un potentiel, sont comprises, soit dans l'énergie potentielle U , soit dans les forces généralisées; les forces qui ne peuvent pas être dérivées d'un potentiel, sont toujours comprises dans les forces généralisées.

Dans notre publication sur le comportement d'un véhicule en courbe [16] nous avons discuté les principes les plus importants du mécanique rationnel plus en détail, et nous avons aussi donné un aperçu de toutes les forces se présentant dans un véhicule de chemin de fer. La discussion des forces est répétée en bref dans le chapitre 41 de la publication présente.

3. Observations géométriques et cinématiques. Le système mécanique que nous voulons observer, est composé des deux rails, de la caisse, des n essieux montés, et des ressorts. Ce système est représenté à la figure 1.

Dans ce qui suit, nous considérerons toujours les ressorts comme dépourvus de masse, et nous les laisserons outre considération. Les autres parties du véhicule sont considérées comme parfaitement rigides, à l'exception des rails et les roues, dont

nous supposons qu'à cause de leur élasticités ceux-ci peuvent présenter des déviations latérales à l'endroit de chaque point de contact rail-roue. Alors la position du système est déterminée par :

- a) les 6 coordonnées de la caisse;
- b) les 6 coordonnées de chaque essieu;
- c) la déviation latérale de chaque rail au point de contact;
- d) la déviation latérale de chaque roue au point de contact.

C'est pourquoi nous avons au total

$$6 + 6n + 2n + 2n = 10n + 6$$

coordonnées.

Cependant, ces coordonnées ne sont pas indépendantes les unes des autres, étant donné des liaisons entre les diverses parties du système. Il y a trois liaisons entre un essieu monté et la caisse, et deux liaisons entre un essieu et la voie. C'est pourquoi le système lié présente

$$m = (10n + 6) - (3 + 2)n = 5n + 6 \quad (1)$$

degrés de liberté et le nombre des coordonnées généralisées est, lui aussi, égal à

$$m = 5n + 6.$$

Dans le chapitre présent nous discuterons d'abord les coordonnées de la caisse et ceux de chaque essieu monté. Puis nous considérerons les liaisons résultant de la coopération entre l'essieu et la caisse, et celles-ci résultant de la coopération entre l'essieu et la voie. Enfin nous ferons quelques observations cinématiques.

31. Coordonnées. Imaginons que la voie ne présente pas des irrégularités et des déviations élastiques. Il existe alors un plan longitudinal de symétrie de la voie, et le véhicule peut se trouver dans la voie de telle façon que son plan de symétrie longitudinal coïncide avec le plan de symétrie de la voie. Dans ce cas nous désignerons la situation où en outre le véhicule se trouve en équilibre comme "une position centrale" du véhicule.

Or, sur une telle voie le véhicule peut se mouvoir de telle sorte que sa position correspond toujours avec une position centrale. Le centre de masses o_i^x de chaque essieu est alors situé

sur une droite se trouvant dans le plan longitudinal de symétrie de la voie. Pour décrire le mouvement de la caisse, utilisons un point de référence o attaché à la caisse, de telle sorte que dans une position centrale du véhicule sur une voie parfaitement droite le point o est situé sur la droite décrite par les points $o_i^{\bar{x}}$, tandis qu'en outre le point o se trouve sur une droite verticale qui passe par le centre de masse du véhicule total. Introduisons un trièdre dextrogyre (o, x, y, z) , dont l'axe ox est parallèle à la voie, le sens positif correspondant au sens de marche du véhicule, et l'axe oz est verticale, le sens positif correspondant à un mouvement de haut en bas. Considérons en outre une position spéciale du trièdre (o, x, y, z) , et introduisons un trièdre fixe $(\omega, \xi, \eta, \zeta)$ coïncidant avec le trièdre (o, x, y, z) se trouvant dans cette position. Soit s la distance ωo . La transformation des coordonnées x, y, z aux coordonnées ξ, η, ζ s'exprime alors par la relation

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{r} \quad (1)$$

avec les vecteurs

$$\bar{\rho} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \bar{\rho}_0 = \begin{pmatrix} s \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Afin de décrire le mouvement de la caisse, imaginons un trièdre $(o^{\bar{x}}, x^{\bar{x}}, y^{\bar{x}}, z^{\bar{x}})$ attaché à la caisse, qui coïncide avec le trièdre (o, x, y, z) lorsque le véhicule se trouve au repos dans une position centrale. Soient

$$x_0^{\bar{x}} = a_0, \quad y_0^{\bar{x}} = 0, \quad z_0^{\bar{x}} = -h \quad (3)$$

les coordonnées du centre de masses $o_0^{\bar{x}}$ de la caisse.

Pour indiquer le déplacement de la caisse, choisissons la valeur de s , déterminant la position du trièdre (o, x, y, z) , de telle manière que $o^{\bar{x}}$ se trouve toujours dans le plan (y, o, z) . Introduisons également les composantes v, w du déplacement de l'origine $o^{\bar{x}}$ par rapport aux axes oy et oz . Les rotations de la caisse autour des axes ox, oy, oz sont décrites à l'aide des cosinus de direction $\cos(x, x^{\bar{x}}), \cos(x, y^{\bar{x}})$ etc. La transformation des coordonnées $x^{\bar{x}}, y^{\bar{x}}, z^{\bar{x}}$ aux coordonnées x, y, z peut alors

être écrite sous la forme symbolique

$$\bar{r} = \bar{p} + \bar{A} \bar{r}^{\bar{x}}, \quad (4)$$

avec

$$\bar{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ w \end{pmatrix}, \quad \bar{r}^{\bar{x}} = \begin{pmatrix} x^{\bar{x}} \\ y^{\bar{x}} \\ z^{\bar{x}} \end{pmatrix}, \quad (5)$$

et

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \cos(x, x^{\bar{x}}) & \cos(x, y^{\bar{x}}) & \cos(x, z^{\bar{x}}) \\ \cos(y, x^{\bar{x}}) & \cos(y, y^{\bar{x}}) & \cos(y, z^{\bar{x}}) \\ \cos(z, x^{\bar{x}}) & \cos(z, y^{\bar{x}}) & \cos(z, z^{\bar{x}}) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Selon 22 nous avons

$$\bar{A} = \bar{A}_{\chi} \bar{A}_{\varphi} \bar{A}_{\psi}, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{\chi} &= \begin{pmatrix} \cos\chi & 0 & \sin\chi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\chi & 0 & \cos\chi \end{pmatrix}, & \bar{A}_{\varphi} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \\ \bar{A}_{\psi} &= \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

d'où on peut déduire

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} \cos\chi\cos\psi + \sin\varphi\sin\chi\sin\psi & -\cos\chi\sin\psi + \sin\varphi\sin\chi\cos\psi & \cos\varphi\sin\chi \\ \cos\varphi\sin\psi & \cos\varphi\cos\psi & -\sin\varphi \\ -\sin\chi\cos\psi + \sin\varphi\cos\chi\sin\psi & \sin\chi\sin\psi + \sin\varphi\cos\chi\cos\psi & \cos\varphi\cos\chi \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Dans ce qui suit nous supposons toujours que les déplacements v et w sont petits par rapport à l'écartement de la voie $2b$ (voir le chapitre 33), et que les angles φ, χ, ψ sont petits par rapport à l'unité. En négligeant tous les termes de troisième ordre et plus on obtient

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\chi^2 - \frac{1}{2}\psi^2 & -\psi + \varphi\chi & \chi \\ \psi & 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\psi^2 & -\varphi \\ -\chi + \varphi\psi & \varphi + \chi\psi & 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{1}{2}\chi^2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Les appellations des déplacements translatatoires du centre $o^{\bar{x}}$ et des déplacements angulaires de la caisse sont indiqués dans le tableau I.

En combinant (1) et (4) nous avons

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 + \bar{p} + \bar{A} \bar{r}^{\mathbb{K}}. \quad (11)$$

A l'aide de cette formule nous sommes à même de calculer les déplacements des divers points de la caisse. Ces déplacements sont les composantes du vecteur

$$\bar{\rho} - \bar{\rho}(0) = \bar{\rho}_0 + \bar{p} + (\bar{A} - \bar{I}) \bar{r}^{\mathbb{K}}, \quad (12)$$

$\bar{\rho}(0)$ étant la valeur de $\bar{\rho}$ lorsque les déplacements s, v, w, φ, χ et ψ sont zéro, et \bar{I} représentant la matrice unitaire.

Pour décrire le mouvement d'un essieu nous pouvons opérer de façon analogue. Introduisons d'abord un trièdre (o_i, x_i, y_i, z_i) exécutant un mouvement translatore le long de la voie. Choisissons l'endroit de l'origine o_i par rapport au trièdre fixe $(\omega, \xi, \eta, \zeta)$ de telle sorte que

$$\omega o_i = s + a_i \quad (13)$$

(a_i étant la distance de l'essieu considéré jusqu' au plan (y, o, z)), de sorte que nous pouvons écrire

$$\bar{\rho}_i = \bar{\rho}_{oi} + \bar{r}_i, \quad (14)$$

avec

$$\bar{\rho}_i = \begin{pmatrix} \xi_i \\ \eta_i \\ \zeta_i \end{pmatrix}, \quad \bar{\rho}_{oi} = \begin{pmatrix} s + a_i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{r}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}, \quad (15)$$

les coordonnées ξ_i, η_i, ζ_i représentant les coordonnées d'un point se rapportant à l'essieu i par rapport au trièdre fixe $(\omega, \xi, \eta, \zeta)$.

Introduisons en outre le trièdre $(o_i^{\mathbb{K}}, x_i^{\mathbb{K}}, y_i^{\mathbb{K}}, z_i^{\mathbb{K}})$, dont l'origine coïncide avec le centre de masses de l'essieu, l'axe $o_i^{\mathbb{K}} y_i^{\mathbb{K}}$ coïncide avec l'axe de révolution de l'essieu, et l'axe $o_i^{\mathbb{K}} x_i^{\mathbb{K}}$ est toujours horizontal. La transformation des coordonnées $x_i^{\mathbb{K}}, y_i^{\mathbb{K}}, z_i^{\mathbb{K}}$ aux coordonnées x_i, y_i, z_i s'écrit alors

$$\bar{r}_i = \bar{p}_i + \bar{A}_i \bar{r}_i^{\mathbb{K}}, \quad (16)$$

avec

$$\bar{p}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{pmatrix}, \quad \bar{r}_i^{\mathbb{K}} = \begin{pmatrix} x_i^{\mathbb{K}} \\ y_i^{\mathbb{K}} \\ z_i^{\mathbb{K}} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

et

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{\varphi i} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ 0 & \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_{\psi i} = \begin{pmatrix} \cos \psi_i & -\sin \psi_i & 0 \\ \sin \psi_i & \cos \psi_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \bar{A}_i &= \bar{A}_{\psi i} \bar{A}_{\varphi i} = \begin{pmatrix} \cos \psi_i & -\cos \varphi_i \sin \psi_i & \sin \varphi_i \sin \psi_i \\ \sin \psi_i & \cos \varphi_i \cos \psi_i & -\sin \varphi_i \cos \psi_i \\ 0 & \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} (18)$$

ou en approximation

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \psi_i^2 & -\psi_i & \varphi_i \psi_i \\ \psi_i & 1 - \frac{1}{2} \varphi_i^2 - \frac{1}{2} \psi_i^2 & -\varphi_i \\ 0 & \varphi_i & 1 - \frac{1}{2} \varphi_i^2 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Le trièdre $(o_i^{\mathbf{x}}, x_i^{\mathbf{x}}, y_i^{\mathbf{x}}, z_i^{\mathbf{x}})$ n'est pas attaché à l'essieu i . Pour décrire le mouvement de cet essieu de façon complète, introduisons encore le trièdre $(o_i^{\mathbf{xx}}, x_i^{\mathbf{xx}}, y_i^{\mathbf{xx}}, z_i^{\mathbf{xx}})$, qui est bien attaché à l'essieu et dont l'axe $o_i^{\mathbf{x}} y_i^{\mathbf{xx}}$ coïncide avec l'axe $o_i^{\mathbf{x}} y_i^{\mathbf{x}}$. La relation entre ces deux trièdres s'écrit sous la forme de la transformation

$$\bar{r}_i^{\mathbf{x}} = \bar{A}_{\chi_i^{\mathbf{x}}} \bar{r}_i^{\mathbf{xx}} \quad (20)$$

avec

$$\bar{A}_{\chi_i^{\mathbf{x}}} = \begin{pmatrix} \cos \chi_i^{\mathbf{x}} & 0 & \sin \chi_i^{\mathbf{x}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \chi_i^{\mathbf{x}} & 0 & \cos \chi_i^{\mathbf{x}} \end{pmatrix}. \quad (21)$$

La rotation de l'essieu est déterminée par l'angle $\chi_i^{\mathbf{x}}$. Tandis que les déplacements u_i, v_i, w_i peuvent être considérés comme petits par rapport à l'écartement de la voie $2b$, et les angles φ_i, ψ_i comme petites par rapport à l'unité, l'angle $\chi_i^{\mathbf{x}}$ a toujours une valeur quelconque.

La combinaison des formules (16) et (20) donne

$$\bar{r}_i = \bar{p}_i + \bar{B}_i \bar{r}_i^{\mathbf{xx}} \quad (22)$$

avec

$$\bar{B}_i = \bar{A}_i \bar{A}_{\chi_i^{\mathbf{x}}}. \quad (23)$$

D'autre part nous pouvons tirer de (14) et (16) la relation

$$\bar{p}_i = \bar{p}_{oi} + \bar{p}_i + \bar{A}_i \bar{r}_i^{\mathbf{x}}. \quad (24)$$

32. La coopération entre caisse et essieu. A l'endroit de la boîte d'essieu ij la caisse peut présenter un déplacement vertical par rapport à l'essieu égal à la flexion extra du ressort f_{ij} . Par contre, à cause des glissières le jeu horizontal longitudinal et le jeu horizontal latéral est égal à zéro, ce qui donne lieu à trois liaisons par essieu.

Calculons la flexion de ressort f_{ij} et les trois relations entre les coordonnées de la caisse et celles de l'essieu i résultant des liaisons. Dans ce but, supposons d'abord qu'à l'endroit de la boîte d'essieu la caisse peut présenter également un déplacement horizontal longitudinal - $s_{hxi j}$ et un déplacement horizontal latéral - $s_{hyi j}$. On vérifie sans peine qu'alors les quantités $s_{hxi j}$, $s_{hyi j}$ et f_{ij} sont déterminées par la relation

$$\begin{pmatrix} -s_{hxi j} \\ -s_{hyi j} \\ f_{ij} \end{pmatrix} = \bar{A}^{-1} (\bar{p} - \bar{p}_i) \quad (1)$$

avec \bar{p} (31, 11) et \bar{p}_i (31, 24), les vecteurs $\bar{r}^{\mathbf{x}}$ et $\bar{r}_i^{\mathbf{x}}$ étant égaux à

$$\bar{r}^{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} a_i \\ \pm b_i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{r}_i^{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm b_i \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

respectivement. On trouve alors

$$\begin{pmatrix} -s_{hxi j} \\ -s_{hyi j} \\ f_{ij} \end{pmatrix} = \bar{r}^{\mathbf{x}} - \bar{A}^{-1} \bar{A}_i \bar{r}_i^{\mathbf{x}} + \bar{A}^{-1} (\bar{p}_o - \bar{p}_{oi} + \bar{p} - \bar{p}_i). \quad (3)$$

A l'aide de (31, 5), (31, 10), (31, 17) et (31, 19) on déduit

$$\left. \begin{aligned} s_{hxi j} &= u_i \pm b_i (\varphi - \varphi_i) - \frac{1}{2} a_i (\chi^2 + \psi^2) \mp b_i \varphi_i \chi - \psi (v - v_i) + \chi (w - w_i), \\ s_{hyi j} &= -(v - v_i) - a_i \psi + a_i \varphi \chi - \psi u_i - \varphi (w - w_i) \mp \frac{1}{2} b_i \{ (\varphi - \varphi_i)^2 + (\psi - \psi_i)^2 \}, \\ f_{ij} &= w - w_i \pm b_i (\varphi - \varphi_i) - a_i \chi \pm b_i \chi \psi_i - u_i \chi - \varphi (v - v_i). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Or, il est clair que la construction du véhicule ne peut pas être de telle sorte qu'aussi le déplacement s_{hyi1} que le déplacement s_{hyi2} est égal à zéro. Supposons que la construction est exécutée de façon que le déplacement moyen

$$s_{hyi} = \frac{1}{2} (s_{hyi1} + s_{hyi2}) \quad (5)$$

est égal à zéro. Dans ce cas les trois conditions

$$s_{hxi j} = 0, \quad s_{hyi} = 0 \quad (j=1,2) \quad (6)$$

doivent être remplies; elles donnent lieu aux relations

$$u_i = \frac{1}{2} a_i (\chi^2 - \psi^2) - \chi(w - w_i), \quad (7^a)$$

$$v_i = v + a_i \psi - a_i \varphi \chi + \varphi(w - w_i), \quad (7^b)$$

$$\psi_i = \psi - \varphi_i \chi, \quad (7^c)$$

et à l'aide de ces relations on peut simplifier l'expression (4) pour la flexion d'un ressort à

$$f_{ij} = w \setminus w_i - a_i \chi \pm b_i (\varphi - \varphi_i) + a_i \varphi \psi \pm b_i \chi \psi. \quad (8)$$

De même on peut transformer l'expression (31,19) pour \bar{A}_i en

$$\bar{A}_i = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2} \psi^2 & -\psi + \varphi_i \chi & \varphi_i \psi \\ \psi - \varphi_i \chi & 1 - \frac{1}{2} \psi^2 - \frac{1}{2} \varphi_i^2 & -\varphi_i \\ 0 & \varphi_i & 1 - \frac{1}{2} \varphi_i^2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

33. La coopération entre voie et essieu. Il faut maintenant rechercher les propriétés géométriques résultant de la coopération entre la voie et les essieux montés du véhicule pris en considération.

Le problème que nous nous proposons de traiter a été étudié déjà entre autres par Heumann [19], Borgeaud [20], Bouteloup [21] et Martarelli [24]. Ces études, très valables en soi, sont moins propres à servir comme point de départ pour des recherches dynamiques générales du problème d'interaction entre voie et véhicule.

C'est pourquoi nous avons développé une nouvelle méthode pour aborder le problème. Elle revient à ce qu'on considère les déplacements de l'essieu par rapport à la voie et les déplacements des points de contact par rapport à la caisse du véhicule

comme faibles, comme nous l'avons fait déjà avant dans le chapitre présent. La méthode peut être appliquée à des rails et des roues de profil quelconque.

Appelons A_{oij} ($j=1,2$) les points de contact rail-roue dans le cas de la voie non déviée et de l'essieu se trouvant dans une position centrale (où les trièdres (o_i, x_i, y_i, z_i) et $(o_i^*, x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ coïncident). Appelons b la demi-distance des points A_{oi1} et A_{oi2} , et r la distance de ces points à l'axe $o_i y_i$.

Dans le chapitre 31 nous avons rencontré les coordonnées $u_i, v_i, w_i, \varphi_i, \psi_i$ se rapportant à l'essieu i . Dans le chapitre 331 nous chercherons les deux relations entre ces coordonnées et les déviations des rails et des roues résultant du fait que lors d'une déviation de la voie et d'un déplacement de l'essieu ce dernier présente toujours deux points de contact (désignés par A_{ij} ($j=1,2$)). Puis dans le chapitre 332 nous déterminerons encore les directions normales et tangentiels et les rayons de courbure du rail et de la roue au point de contact, quantités dont nous aurons besoin lors du calcul des forces tangentiels roue-rail.

331. Relations entre les quantités fixant le déplacement d'un essieu et les endroits des points de contact rail-roue. Dans la figure 2^a nous avons représenté le plan (y_i, o_i, z_i) avec les sections des deux rails dans la supposition que chaque rail est déplacé dans la direction $o_i y_i$ d'une valeur $\pm e_{ij}$. Les points de contact A_{ij} se trouvent au voisinage des points A_{oij} . Désignons les composantes du vecteur $\overline{A_{oij} A_{ij}}$ par $\xi_{ij}, \mp (\eta_{ij} - e_{ij}), \zeta_{ij}$, les quantités $\xi_{ij}, \eta_{ij}, \zeta_{ij}$ ainsi que les quantités e_{ij} étant faibles par rapport à r et b . La description peut se faire d'une façon tout à fait analogue dans le cas de l'essieu pour lequel le plan (y_i^*, o_i^*, z_i^*) avec les sections des deux bandages est représenté dans la figure 2^b. Il n'y a que deux différences: certaines quantités sont indiquées avec un astérisque afin de les distinguer des quantités correspondantes de la voie, et les déplacements latéraux des roues sont considérés comme positifs dans la direction à l'intérieur, de sorte que par rapport à l'axe $o_i^* y_i^*$ ils sont égaux à $\mp e_{ij}^*$. C'est pourquoi les composantes du vecteur $\overline{A_{oij}^* A_{ij}^*}$ par rapport au trièdre $(o_i^*, x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ s'écrivent respectivement $\xi_{ij}^*, \mp (\eta_{ij}^* + e_{ij}^*), \zeta_{ij}^*$.

Jusqu'ici nous n'avons considéré qu'une voie sans déviations. Supposons maintenant qu'à l'endroit de l'essieu i le centre de la voie présente une déviation latérale (dans la direction de $o_i y_i$) η_i et une déviation verticale (dans la direction de $o_i z_i$) ξ_i , et qu'en outre la voie présente un déplacement angulaire β_i autour de l'axe $o_i x_i$.

Avec la convention pour les signes des angles on vérifie facilement qu'à l'endroit de l'essieu i le rail j fait un angle χ_{ij} avec le plan (x_i, o_i, y_i) et un angle ψ_{ij} avec le plan (x_i, o_i, z_i) qui sont respectivement déterminés par

$$\chi_{ij} = -\xi_i' \mp b\beta_i', \quad \psi_{ij} = \eta_i', \quad (1)$$

le prime indiquant une dérivation par rapport au coordonnée s ; les valeurs des dérivées doivent être calculées au point $s + a_i$.

Les trièdres $(A_{ij}, \xi_{ij}, \eta_{ij}, \xi_{ij})$ ne sont plus parallèles au trièdre (o_i, x_i, y_i, z_i) , mais ils présentent une rotation sur l'angle β_i autour des axes $A_{ij}\xi_{ij}$. On trouve facilement que maintenant on peut représenter les surfaces du rail par les équations

$$\left. \begin{aligned} x_i &= \xi_{ij}, \\ y_i &= \pm (b - \eta_{ij} + e_{ij}) + \eta_i - \beta_i \xi_{ij}, \\ z_i &= r + \xi_{ij} + \xi_i \pm \beta_i (b - \eta_{ij} + e_{ij}), \end{aligned} \right\} \quad (j=1,2) \quad (2^a)$$

équations dans lesquelles les quantités ξ_{ij} , η_{ij} et ξ_{ij} sont liées par une relation qui dépend du profil du rail. Supposons d'abord que $\xi_{ij} = 0$; cette relation peut être écrite alors sous la forme

$$\xi_{ij} = f(\eta_{ij}). \quad (j=1,2) \quad (3^a)$$

Par conséquent la relation s'écrit dans le cas général

$$\xi_{ij} + \chi_{ij} \xi_{ij} = f(\eta_{ij} \pm \psi_{ij} \xi_{ij}), \quad (j=1,2)$$

ou après développement en série du second membre

$$\xi_{ij} + \chi_{ij} \xi_{ij} = f(\eta_{ij}) \pm \psi_{ij} \xi_{ij} \operatorname{tg} \gamma_{ij}, \quad (j=1,2) \quad (4^a)$$

Ici nous avons introduit, pour abréger, l'angle γ_{ij} , défini par

$$\operatorname{tg} \gamma_{ij} = \left(\frac{df}{d\eta} \right) \eta = \eta_{ij}. \quad (j=1,2) \quad (5^a)$$

Les trièdres $(A_{ij}, \xi_{ij}^{\times}, \eta_{ij}^{\times}, \zeta_{ij}^{\times})$ sont parallèles au trièdre $(o_i^{\times}, x_i^{\times}, y_i^{\times}, z_i^{\times})$, et les équations des bandages peuvent s'écrire

$$x_i^{\times} = \xi_{ij}^{\times}, y_i^{\times} = \pm (b - \eta_{ij}^{\times} - e_{ij}^{\times}), z_i^{\times} = r + \zeta_{ij}^{\times}, \quad (j=1,2) \quad (2^b)$$

$\xi_{ij}^{\times}, \eta_{ij}^{\times}$ et ζ_{ij}^{\times} satisfaisant une relation qui dépend du profil du bandage. Représentons ce profil au plan $(y_i^{\times}, o_i^{\times}, z_i^{\times})$ par

$$\zeta_{ij}^{\times} = f^{\times}(\eta_{ij}^{\times}) \quad (j=1,2) \quad (3^b)$$

(ξ_{ij}^{\times} étant zéro), et écrivons de façon analogue à (5^a)

$$\operatorname{tg} \gamma_{ij}^{\times} = \left(\frac{df^{\times}}{d\eta^{\times}} \right) \eta^{\times} = \eta_{ij}^{\times}. \quad (j=1,2) \quad (5^b)$$

La relation cherchée s'écrit alors

$$\sqrt{\xi_{ij}^{\times 2} + (r + \zeta_{ij}^{\times})^2} - r = f^{\times}(\eta_{ij}^{\times}), \quad (j=1,2)$$

ou après développement du radical en série au voisinage des valeurs $\xi_{ij}^{\times} = 0, \zeta_{ij}^{\times} = 0$, si nous nous limitons jusqu'à des termes du deuxième ordre:

$$\zeta_{ij}^{\times} + \frac{\xi_{ij}^{\times 2}}{2r} = f^{\times}(\eta_{ij}^{\times}), \quad (j=1,2)$$

de sorte que

$$\zeta_{ij}^{\times} = - \frac{\xi_{ij}^{\times 2}}{2r} + f^{\times}(\eta_{ij}^{\times}). \quad (j=1,2) \quad (4^b)$$

Considérons maintenant le nombre des inconnues et le nombre des équations disponibles. Prenons comme inconnues les six coordonnées $\xi_{ij}, \eta_{ij}, \zeta_{ij}$ ($j=1,2$) des points de contact A_{i1} et A_{i2} , les six coordonnées $\xi_{ij}^{\times}, \eta_{ij}^{\times}, \zeta_{ij}^{\times}$ ($j=1,2$) de ces points, et les quatre angles d'inclinaison $\gamma_{ij}, \gamma_{ij}^{\times}$ ($j=1,2$). Les cinq quantités de déplacement u_i, v_i, w_i, ϕ_i et ϕ_i^{\times} sont aussi inconnues. Le fait que les coordonnées des points de contact (2^a) et (2^b) doivent satisfaire aux équations (31, 16) nous conduit à six relations. Ensuite quatre relations expriment qu'en chaque point de contact la normale à la surface de bandage coïncide avec celle du rail. De plus nous avons les deux relations (4^a) , les deux relations (4^b) , les deux relations (5^a) et les deux relations (5^b) . Nous avons donc 21 inconnues et 18 équations, de sorte que nous pouvons choisir,

par exemple, u_i , v_i et ϕ_i et exprimer les deux coordonnées w_i , φ_i et les 16 quantités ξ_{ij} , η_{ij} , ζ_{ij} , $\xi_{ij}^{\bar{}}$, $\eta_{ij}^{\bar{}}$, $\zeta_{ij}^{\bar{}}$, γ_{ij} et $\gamma_{ij}^{\bar{}}$ ($j=1,2$) en u_i, v_i, ϕ_i et en outre en e_{ij} , $e_{ij}^{\bar{}}$, η_i , ζ_i , β_i , χ_{ij} et ψ_{ij} .

Rédigeons les six premières équations. En négligeant les termes de troisième ordre et plus on tire facilement de (31,16), (31,17), (31,19)

$$\left. \begin{aligned} x_i &= u_i + x_i^{\bar{}} - \phi_i y_i^{\bar{}} + \varphi_i \phi_i z_i^{\bar{}}, \\ y_i &= v_i + \phi_i x_i^{\bar{}} + \left(1 - \frac{1}{2} \varphi_i^2 - \frac{1}{2} \phi_i^2\right) y_i^{\bar{}} - \varphi_i z_i^{\bar{}}, \\ z_i &= w_i + \varphi_i y_i^{\bar{}} + \left(1 - \frac{1}{2} \varphi_i^2\right) z_i^{\bar{}}, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

et ensuite de (2^a) et (2^b)

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ij} &= \xi_{ij}^{\bar{}} + u_i + b\phi_i \pm (\eta_{ij}^{\bar{}} + e_{ij}^{\bar{}}) \phi_i + r\varphi_i \phi_i, \\ \eta_{ij} &= \eta_{ij}^{\bar{}} + v_i \pm r\varphi_i + e_{ij} + e_{ij}^{\bar{}} \pm \eta_i + \frac{1}{2} b (\varphi_i^2 + \phi_i^2) \\ &\quad + \beta_i \zeta_{ij} + \phi_i \xi_{ij} \pm \varphi_i \zeta_{ij}^{\bar{}}, \\ \zeta_{ij} &= \zeta_{ij}^{\bar{}} + w_i \pm b\varphi_i - \zeta_i + b\beta_i - \frac{1}{2} r \varphi_i^2 \\ &\quad + \varphi_i (\eta_{ij}^{\bar{}} + e_{ij}^{\bar{}}) + \beta_i \eta_{ij} \pm \beta_i e_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (j=1,2) \quad (7)$$

Aboutons maintenant à la rédaction des quatre conditions de la coïncidence des plans tangents. Mettons les formules (4^a) et (4^b) sous la forme

$$\left. \begin{aligned} F_{ij}(\xi_{ij}, \eta_{ij}, \zeta_{ij}) &= -f(\eta_{ij}) + \zeta_{ij} + \xi_{ij}(\chi_{ij} + \phi_{ij} \operatorname{tg} \gamma_{ij}), \\ F_{ij}^{\bar{}}(\xi_{ij}^{\bar{}}, \eta_{ij}^{\bar{}}, \zeta_{ij}^{\bar{}}) &= -f^{\bar{}}(\eta_{ij}^{\bar{}}) + \zeta_{ij}^{\bar{}} + \frac{\xi_{ij}^{\bar{2}}}{2r}. \end{aligned} \right\} \quad (j=1,2) \quad (8)$$

Introduisons les cosinus de direction entre les normales n_{ij} , $n_{ij}^{\bar{}}$ aux surfaces $F_{ij} = 0$, $F_{ij}^{\bar{}} = 0$ et les axes des trièdres (o_1, x_1, y_1, z_1) et $(o_1^{\bar{}}, x_1^{\bar{}}, y_1^{\bar{}}, z_1^{\bar{}})$; ils satisfont à

$$\left. \begin{aligned}
 \cos(n_{1j}, x_1) &= \frac{\frac{\partial F_{1j}}{\partial x_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F_{1j}}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{1j}}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{1j}}{\partial z_{1j}}\right)^2}} \text{ cycl.}, \\
 \cos(n_{1j}^{\bar{x}}, x_1) &= \frac{\frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial x_1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial z_1}\right)^2}} \text{ cycl.}, \\
 \cos(n_{1j}, x_1^{\bar{x}}) &= \frac{\frac{\partial F_{1j}}{\partial x_1^{\bar{x}}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F_{1j}}{\partial x_1^{\bar{x}}}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{1j}}{\partial y_1^{\bar{x}}}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{1j}}{\partial z_1^{\bar{x}}}\right)^2}} \text{ cycl.}, \\
 \cos(n_{1j}^{\bar{x}}, x_1^{\bar{x}}) &= \frac{\frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial x_1^{\bar{x}}}}{\sqrt{\left(\frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial x_1^{\bar{x}}}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial y_1^{\bar{x}}}\right)^2 + \left(\frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial z_1^{\bar{x}}}\right)^2}} \text{ cycl.};
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (j=1,2) \\ (9^a) \\ \\ (j=1,2) \\ (9^b) \end{array}$$

on peut alors écrire les conditions cherchées comme suit:

$$\left. \begin{aligned}
 \cos(x_1^{\bar{x}}, n_{1j}) &= \cos(x_1^{\bar{x}}, n_{1j}^{\bar{x}}), \\
 \cos(y_1^{\bar{x}}, n_{1j}) &= \cos(y_1^{\bar{x}}, n_{1j}^{\bar{x}}), \\
 \cos(z_1^{\bar{x}}, n_{1j}) &= \cos(z_1^{\bar{x}}, n_{1j}^{\bar{x}}),
 \end{aligned} \right\} (j = 1, 2) \quad (10)$$

les signes étant choisis de telle façon que la normale n_{1j} est dirigée vers l'intérieur du rail, et la normale $n_{1j}^{\bar{x}}$ vers l'extérieur du bandage. (Les quantités $\cos(x_1, n_{1j})$ etc. et $\cos(x_1, n_{1j}^{\bar{x}})$ ne se présentent pas dans les équations (10), mais nous y aurons besoin dans le chapitre 332.) Étant donné qu'un des trois cosinus de direction de n_{1j} (ou $n_{1j}^{\bar{x}}$) est dépendant des deux autres, les relations (9) ne donnent lieu qu'à quatre relations entre les quantités $\xi_{1j}, \dots, \xi_{1j}^{\bar{x}}$ et u_i, \dots, ψ_i .

Nous tirons de (2^a) et (8)

$$\frac{\partial F_{1j}}{\partial x_1} = \chi_{1j} \mp \psi_{1j} \operatorname{tg} \gamma_{1j}, \quad \frac{\partial F_{1j}}{\partial y_1} = \pm \operatorname{tg} \gamma_{1j} - \beta_1, \quad \frac{\partial F_{1j}}{\partial z_1} = 1 \pm \beta_1 \operatorname{tg} \gamma_{1j}, \quad (11^a)$$

et de (2^b) et (7)

$$\frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial x_1^{\bar{x}}} = \frac{\xi_{1j}^{\bar{x}}}{r}, \quad \frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial y_1^{\bar{x}}} = \pm \operatorname{tg} \gamma_{1j}^{\bar{x}}, \quad \frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial z_1^{\bar{x}}} = 1; \quad (11^b)$$

puis nous déduisons de (11^a) et (6)

$$\frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial x_1^{\bar{x}}} = \chi_{1j} \pm (\psi_1 - \psi_{1j}) \operatorname{tg} \gamma_{1j}, \quad \frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial y_1^{\bar{x}}} = \pm \operatorname{tg} \gamma_{1j} + \varphi_1 - \beta_1, \quad \frac{\partial F_{1j}^{\bar{x}}}{\partial z_1^{\bar{x}}} = 1 \mp (\varphi_1 - \beta_1) \operatorname{tg} \gamma_{1j}, \quad (11^c)$$

de sorte que selon (9^b)

$$\left. \begin{aligned} \cos(n_{1j}, x_1^{\bar{x}}) &= \chi_{1j} \cos \gamma_{1j} \pm (\psi_1 - \psi_{1j}) \sin \gamma_{1j}, \\ \cos(n_{1j}, y_1^{\bar{x}}) &= \pm \sin \gamma_{1j} + (\varphi_1 - \beta_1) \cos \gamma_{1j}, \\ \cos(n_{1j}, z_1^{\bar{x}}) &= \cos \gamma_{1j} \mp (\varphi_1 - \beta_1) \sin \gamma_{1j}, \end{aligned} \right\} (j=1,2) \quad (12^a)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(n_{1j}^{\bar{x}}, x_1^{\bar{x}}) &= \frac{\xi_{1j}^{\bar{x}}}{r} \cos \gamma_{1j}^{\bar{x}}, \\ \cos(n_{1j}^{\bar{x}}, y_1^{\bar{x}}) &= \pm \sin \gamma_{1j}^{\bar{x}}, \\ \cos(n_{1j}^{\bar{x}}, z_1^{\bar{x}}) &= \cos \gamma_{1j}^{\bar{x}}. \end{aligned} \right\} (j=1,2) \quad (12^b)$$

De (10), (12^a) et (12^b) on tire enfin les relations

$$\left. \begin{aligned} \chi_{1j} \cos \gamma_{1j} - \frac{\xi_{1j}^{\bar{x}}}{r} \cos \gamma_{1j}^{\bar{x}} \pm (\psi_1 - \psi_{1j}) \sin \gamma_{1j} &= 0, \\ \sin \gamma_{1j} - \sin \gamma_{1j}^{\bar{x}} \pm (\varphi_1 - \beta_1) \cos \gamma_{1j} &= 0, \\ \cos \gamma_{1j} - \cos \gamma_{1j}^{\bar{x}} \mp (\varphi_1 - \beta_1) \sin \gamma_{1j} &= 0; \end{aligned} \right\} (j=1,2)$$

du deuxième et du troisième jeu on déduit

$$\sin(\gamma_{1j} - \gamma_{1j}^{\bar{x}}) \pm (\varphi_1 - \beta_1) = 0, \quad \cos(\gamma_{1j} - \gamma_{1j}^{\bar{x}}) - 1 = 0, \quad (j=1,2)$$

de sorte qu'il en résulte les quatre relations

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{1j} &= \gamma_{1j}^{\bar{x}} \mp (\varphi_1 - \beta_1), & (13^a) \\ \xi_{1j}^{\bar{x}} &= \pm r (\varphi_1 - \psi_{1j}) \operatorname{tg} \gamma_{1j} + r \chi_{1j}. & (13^b) \end{aligned} \right\} (j=1,2)$$

Dans les dernières équations nous n'avons conservé que des termes linéaires. En linéarisant également les équations (7) on obtient

$$\left. \begin{aligned} \xi_{ij} &= \xi_{ij}^{\bar{x}} + u_i \mp b\phi_i, & (14^a) \\ \eta_{ij} &= \eta_{ij}^{\bar{x}} \mp (v_i - d_i - \eta_i - r\phi_i) + e_i & (14^b) \\ \zeta_{ij} &= \zeta_{ij}^{\bar{x}} + w_i \pm b(\phi_i - \beta_i) - \zeta_i, & (14^c) \end{aligned} \right\} (j=1,2)$$

avec

$$e_{ij} + e_{ij}^{\bar{x}} = e_i \pm d_i. \quad (15)$$

Les paires d'équations (3^a), (3^b), (5^a), (5^b), (13^a), (14^b) et (14^c) forment un jeu de 14 équations pour les 17 inconnues v_i , w_i , ϕ_i , d_i , e_i , η_{ij} , ζ_{ij} , $\eta_{ij}^{\bar{x}}$, $\zeta_{ij}^{\bar{x}}$, γ_{ij} et $\gamma_{ij}^{\bar{x}}$ ($j=1,2$). Par conséquent il est possible d'exprimer les quantités w_i etc. dans les quantités v_i , d_i et e_i . On vérifie facilement que w_i etc. dépendent seulement de $v_i - d_i$ et e_i , de sorte que nous pouvons écrire

$$w_i = w_i(v_i - d_i, e_i), \quad \phi_i = \phi_i(v_i - d_i, e_i), \quad \xi_{ij} = \xi_{ij}(v_i - d_i, e_i), \text{ etc.} \quad (16)$$

Dans l'établissement de ces équations on peut souvent admettre que

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{\bar{x}}. \quad (j=1,2) \quad (17)$$

Il est alors possible de remplacer les quantités η_{ij} , ζ_{ij} , $\eta_{ij}^{\bar{x}}$, $\zeta_{ij}^{\bar{x}}$ par

$$y_{ij} = \eta_{ij}^{\bar{x}} - \eta_{ij}, \quad z_{ij} = \zeta_{ij}^{\bar{x}} - \zeta_{ij}. \quad (j=1,2) \quad (18)$$

Or, on peut établir la relation

$$z_{ij} = z_{ij}(y_{ij}) \quad (j=1,2) \quad (19)$$

entre y_{ij} et z_{ij} , en admettant une valeur pour $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{\bar{x}}$. Des relations (5^a) et (5^b) on déduit alors les valeurs de η_{ij} et $\eta_{ij}^{\bar{x}}$ y correspondant, et des relations (3^a) et (3^b) on trouve les valeurs de ζ_{ij} et $\zeta_{ij}^{\bar{x}}$ y relatives.

De (18), (14^b) et (14^c) on déduit

$$y_{ij} = \pm (v_i - d_i - \eta_i - r\phi_i) - e_i, \quad z_{ij} = -w_i \mp b(\phi_i - \beta_i) + \zeta_i. \quad (j=1,2) \quad (20)$$

Pour chaque valeur de i il y a deux équations (19) et quatre équations (20). Ainsi on dispose de six équations, desquelles on peut résoudre les six inconnues y_{ij} , z_{ij} , w_i et φ_i ($j=1,2$) pour des valeurs données de $v_i - d_i$, e_i , η_i , ξ_i et β_i .

En déterminant les augmentations dy_{ij} et dz_{ij} de (18), on déduit à l'aide des relations (5^a) et (5^b)

$$\operatorname{tg} \gamma_{ij} = \left(\frac{dz_{ij}}{dy} \right)_{y=y_{ij}}, \quad (j=1,2) \quad (21)$$

de sorte qu'aussi les quantités $\gamma_{ij} = \gamma_{ij}^{\times}$ sont connues. De ces quantités on déduit η_{ij} et η_{ij}^{\times} à l'aide des relations (5^a) et (5^b), et ensuite ξ_{ij} et ξ_{ij}^{\times} à l'aide de (3^a) et (3^b) respectivement.

Finissons ce chapitre en observant que pour beaucoup de combinaisons d'un profil de rail avec un profil de roue il existe la possibilité que, soit au côté à droite, soit au côté à gauche, le contact rail-roue a lieu en deux points au lieu de en un seul. Pour un tel contact il existe une relation entre $v_i - d_i$ et e_i , et on ne peut encore choisir qu'une seule de ces deux quantités.

332. Directions normales et tangentiellles; rayons de courbure. Des relations (331,6) on déduit facilement que dans le cas linéaire

$$\left. \begin{aligned} \cos(x_i, x_i^{\times}) &= 1, \quad \cos(x_i, y_i^{\times}) = -\psi_i, \quad \cos(x_i, z_i^{\times}) = 0, \\ \cos(y, x_i^{\times}) &= \psi_i \quad \text{etc.} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Ecrivons ces formules sous la forme de la matrice suivante:

	x_i^{\times}	y_i^{\times}	z_i^{\times}
x_i	1	$-\psi_i$	0
y_i	ψ_i	1	$-\varphi_i$
z_i	0	φ_i	1

(2)

Introduisons maintenant l'axe t_{xij} à direction parallèle au rail déformé et l'axe t_{yij} à direction perpendiculaire sur n_{ij} et t_{xij} , qui fait un angle aigu avec l'axe $o_i y_i$. Les cosinus de direction de t_{xij} avec les axes du trièdre (o_i, x_i, y_i, z_i) sont respectivement: 1, ψ_{ij} et $-\chi_{ij}$. Les cosinus de direction de t_{yij}

se déduisent des cosinus de direction de t_{xij} et de n_{ij} . Or, de (2) et (331,12^a) on tire facilement les cosinus de direction de n_{ij} :

$$\begin{aligned}\cos(n_{ij}, x_i) &= \cos(n_{ij}, x_i^{\bar{x}}) \cos(x_i, x_i^{\bar{x}}) + \cos(n_{ij}, y_i^{\bar{x}}) \cos(x_i, y_i^{\bar{x}}) \\ &\quad + \cos(n_{ij}, z_i^{\bar{x}}) \cos(x_i, z_i^{\bar{x}}) \\ &= \chi_{ij} \cos \gamma_{ij} \mp \phi_{ij} \sin \gamma_{ij} \quad \text{etc.};\end{aligned}$$

puis on calcule $\cos(t_{yij})$ etc. à l'aide des cosinus de direction de n_{ij} et t_{xij} et des propriétés d'orthogonalité et de la normalisation. Les résultats sont réunis sous la forme de la matrice suivante:

	x_i	y_i	z_i
n_{ij}	$\chi_{ij} \cos \gamma_{ij} \mp \phi_{ij} \sin \gamma_{ij}$	$\pm \sin \gamma_{ij} - \beta_i \cos \gamma_{ij}$	$\cos \gamma_{ij} \pm \beta_i \sin \gamma_{ij}$
t_{xij}	1	ϕ_{ij}	$-\chi_{ij}$
t_{yij}	$\mp \chi_{ij} \sin \gamma_{ij} - \phi_{ij} \cos \gamma_{ij}$	$\cos \gamma_{ij} \pm \beta_i \sin \gamma_{ij}$	$\mp \sin \gamma_{ij} + \beta_i \cos \gamma_{ij}$

(3)

De façon analogue nous définissons une direction $t_{xij}^{\bar{x}}$ normale en A_{ij} au plan passant par A_{ij} et par $o_i^{\bar{x}} y_i^{\bar{x}}$ et qui fait un angle aigu avec la direction $o_i^{\bar{x}} x_i^{\bar{x}}$; ainsi qu'une direction $t_{yij}^{\bar{x}}$ normale aux directions $n_{ij}^{\bar{x}}$ et $t_{xij}^{\bar{x}}$, qui fait un angle aigu avec $o_i^{\bar{x}} y_i^{\bar{x}}$. De la définition $t_{xij}^{\bar{x}}$ on conclut que l'angle entre $o_i^{\bar{x}} x_i^{\bar{x}}$ et $t_{xij}^{\bar{x}}$ est égal à $\xi_{ij}^{\bar{x}}/r$, ou selon (331,13^b) à $\pm (\phi_i - \phi_{ij}) \tan \gamma_{ij} + \chi_{ij}$ ($j=1,2$), tandis que l'angle entre $o_i^{\bar{x}} y_i^{\bar{x}}$ et $t_{xij}^{\bar{x}}$ est égale à $\pi/2$. A l'aide de (331,12^b) on trouve alors les cosinus de direction de $n_{ij}^{\bar{x}}$, $t_{xij}^{\bar{x}}$, $t_{yij}^{\bar{x}}$ par rapport au trièdre $(o_i^{\bar{x}}, n_i^{\bar{x}}, y_i^{\bar{x}}, z_i^{\bar{x}})$ sous la forme de la matrice

	x_i	y_i	z_i
n_{ij}	$\chi_{ij} \cos \gamma_{ij} \pm (\psi_i - \psi_{ij}) \sin \gamma_{ij}$	$\pm \sin \gamma_{ij} + (\varphi_i - \beta_i) \cos \gamma_{ij}$	$\cos \gamma_{ij} \mp (\varphi_i - \beta_i) \sin \gamma_{ij}$
t_{xij}	1	0	$\mp (\psi_i - \psi_{ij}) \operatorname{tg} \gamma_{ij} - \chi_{ij}$
t_{yij}	$\mp \chi_{ij} \sin \gamma_{ij} - (\psi_i - \psi_{ij}) \frac{\sin^2 \gamma_{ij}}{\cos \gamma_{ij}}$	$\cos \gamma_{ij} \mp (\varphi_i - \beta_i) \sin \gamma_{ij}$	$\mp \sin \gamma_{ij} - (\varphi_i - \beta_i) \cos \gamma_{ij}$

(4)

De (2) et (4) on déduit enfin les cosinus de direction

	x_i	y_i	z_i
n_{ij}	$\chi_{ij} \cos \gamma_{ij} \mp \psi_{ij} \sin \gamma_{ij}$	$\pm \sin \gamma_{ij} - \beta_i \cos \gamma_{ij}$	$\cos \gamma_{ij} \pm \beta_i \sin \gamma_{ij}$
t_{xij}	1	ψ_i	$\mp (\psi_i - \psi_{ij}) \operatorname{tg} \gamma_{ij} - \chi_{ij}$
t_{yij}	$\mp \chi_{ij} \sin \gamma_{ij} - \frac{\psi_i - \psi_{ij} \sin^2 \gamma_{ij}}{\cos \gamma_{ij}}$	$\cos \gamma_{ij} \pm \beta_i \sin \gamma_{ij}$	$\mp \sin \gamma_{ij} + \beta_i \cos \gamma_{ij}$

(5)

Les projections de t_{xij} , t_{yij} , t_{xij}^* , t_{yij}^* sur le plan (x_1, y_1) sont dessinées dans la figure 3. On voit que les directions t_{xij} , t_{yij} forment un angle, selon (3) et (5) égal à

$$\alpha_{ij} = \frac{\psi_1 - \psi_{1j}}{\cos \gamma_{1j}} . \quad (j=1,2) \quad (6)$$

Pour l'étude des conditions de contact il est important de connaître les rayons de courbure principaux des surfaces du rail et du bandage. Choisissons les signes des rayons de telle façon qu'un rayon est positif quand son centre de courbure se trouve sur la partie positive de la normale; dans l'autre cas il est négatif.

Les tangentes du rail au point A_{1j} correspondant aux directions t_{xij} , t_{yij} se trouvent dans les sections principales déterminant les rayons de courbure

$$\rho_{xij} = \infty, \quad \rho_{yij} = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{df}{dn} \right)^2 \right\}^{3/2}}{\left(\frac{d^2f}{dn^2} \right) \eta_{ij}} = \frac{1}{\cos \gamma_{ij} \left(\frac{dy}{d\eta} \right) \eta_{ij}} . \quad (j=1,2) \quad (7)$$

La section principale de l'essieu au point de contact A_{1j} qui contient la direction t_{xij}^* se calcule à l'aide du théorème de Meusnier et de (4):

$$\rho_{xij}^* = \frac{r}{\cos(n_{1j}^*, z_1^*)} \approx \frac{r}{\cos \gamma_{1j}} . \quad (j=1,2) \quad (8^a)$$

Enfin la section principale de l'essieu au point A_{1j} qui contient la direction t_{yij}^* , passe aussi par l'axe de révolution, et détermine le rayon de courbure

$$\rho_{yij}^* = \frac{\left\{ 1 + \left(\frac{df^*}{d\eta^*} \right)^2 \right\}^{3/2}}{- \left(\frac{d^2f^*}{d\eta^{*2}} \right) \eta_{ij}^*} = \frac{1}{- \cos \gamma_{ij}^* \left(\frac{dy^*}{d\eta^*} \right) \eta_{ij}^*} . \quad (j=1,2) \quad (8^b)$$

34. Rotations virtuelles. Dans le chapitre présent nous calculerons les rotations de la caisse, ainsi que celles-ci des essieux, qui se

présentent lorsqu'on fait varier les coordonnées généralisées du véhicule, et puis quelques déplacements virtuels qui sont liés avec ces rotations, et dont nous aurons besoin dans le chapitre 43 lors du calcul des forces généralisées. En outre les rotations nous seront utiles dans le chapitre 35 lors du calcul des vitesses angulaires de la caisse et des essieux.

Pour la détermination de la rotation virtuelle $\delta\bar{\theta}$ de la caisse nous considérerons la transformation (31,4) du trièdre (o^*, x^*, y^*, z^*) au trièdre (o, x, y, z) . En variant cette relation, nous obtenons

$$\delta\bar{r} = \delta\bar{p} + \delta\bar{A} \bar{r}^*,$$

soit avec la relation (31,4) inversée:

$$\delta\bar{r} = \delta\bar{p} + \delta\bar{A} \bar{A}^{-1} (\bar{r} - \bar{p}). \quad (1)$$

La matrice

$$\delta\bar{A} \bar{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta_z & \delta\theta_y \\ \delta\theta_z & 0 & -\delta\theta_x \\ -\delta\theta_y & \delta\theta_x & 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

représente la rotation du trièdre (o^*, x^*, y^*, z^*) et de la caisse par rapport aux trièdres (o, x, y, z) et $(\omega, \xi, \gamma, \zeta)$.

Pour la détermination de la rotation virtuelle

$$\delta\bar{\theta} = \begin{pmatrix} \delta\theta_x \\ \delta\theta_y \\ \delta\theta_z \end{pmatrix} \quad (3)$$

de la caisse nous considérons successivement les étapes diverses du processus de la transformation en admettant provisoirement que les origines o et o^* coïncident. Le trièdre (o, x, y, z) est tourné sur un angle $\delta\chi$ autour de l'axe oy à un trièdre auxiliaire (o, x_1, y_1, z_1) , et la formule de transformation s'écrit

$$\bar{r} = \bar{A}_\chi \bar{r}_1. \quad (4)$$

Cette rotation virtuelle a donc les composantes

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \delta\chi \\ 0 \end{pmatrix}$$

par rapport aux deux trièdres. Ensuite le trièdre (o, x_1, y_1, z_1) est tourné sur un angle φ autour de l'axe ox_1 au trièdre (o, x_2, y_2, z_2) . Les composantes par rapport aux trièdres (o, x_1, y_1, z_1) et (o, x_2, y_2, z_2) de cette rotation virtuelle sont

$$\begin{pmatrix} \delta\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Enfin le trièdre (o, x_2, y_2, z_2) est tourné sur un angle $\delta\psi$ autour de l'axe oz_2 au trièdre (o, x^*, y^*, z^*) , et cette rotation présente les composantes

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta\psi \end{pmatrix}$$

par rapport aux deux trièdres mentionnés. On vérifie sans peine à l'aide de (31,7) et (1) que les composantes du vecteur $\delta\bar{\theta}$ par rapport au trièdre (o, x, y, z) sont données par

$$\delta\bar{\theta} = \begin{pmatrix} \delta\theta_x \\ \delta\theta_y \\ \delta\theta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta\chi \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{A}_\chi \begin{pmatrix} \delta\varphi \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \bar{A}_\chi \bar{A}_\psi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta\psi \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Avec (31,8) nous obtenons

$$\left. \begin{aligned} \delta\theta_x &= \delta\varphi \cos \chi + \delta\psi \cos \varphi \sin \chi, \\ \delta\theta_y &= \delta\chi - \delta\psi \sin \varphi, \\ \delta\theta_z &= -\delta\varphi \sin \chi + \delta\psi \cos \varphi \cos \chi, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

soit avec l'approximation du chapitre 31

$$\delta\theta_x = \delta\varphi + \chi\delta\psi, \quad \delta\theta_y = \delta\chi - \varphi\delta\psi, \quad \delta\theta_z = \delta\psi - \chi\delta\varphi. \quad (7)$$

Les expressions pour les composantes du vecteur $\delta\bar{\theta}_i$ de la rotation virtuelle de l'essieu i sont un peu différentes, étant donné d'une autre succession des étapes de la transformation.

A l'aide de (31,16) et (31,18) on trouve

$$\left. \begin{aligned} \delta\theta_{xi} &= \delta\varphi_i \cos \psi_i - \delta\chi_i^* \cos \varphi_i \sin \psi_i, \\ \delta\theta_{yi} &= \delta\varphi_i \sin \psi_i + \delta\chi_i^* \cos \varphi_i \cos \psi_i, \\ \delta\theta_{zi} &= \delta\chi_i^* \sin \varphi_i + \delta\psi_i. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Développons les fonctions harmoniques en série, mettons en outre

$$\chi_i^* = -\frac{s + u_i}{r} + \chi^1, \quad (9)$$

et supposons que la variation de l'angle χ_i est du même ordre de grandeur que la variation des angles φ, χ etc. (sur cette supposition nous reviendrons encore dans le chapitre suivant). Nous trouvons alors

$$\left. \begin{aligned} \delta\theta_{xi} &= \delta\varphi_i + \frac{\psi_i}{r} \delta s + \frac{\psi_i}{r} \delta u_i - \psi_i \delta\chi_i, \\ \delta\theta_{yi} &= -\frac{\delta s}{r} - \frac{\delta u_i}{r} + \delta\chi_i + \psi_i \delta\varphi_i + \frac{\varphi_i^2 + \psi_i^2}{2r} \delta s, \\ \delta\theta_{zi} &= \delta\varphi_i - \frac{\varphi_i}{r} \delta s - \frac{\varphi_i}{r} \delta u_i + \varphi_i \delta\chi_i, \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

soit avec (32,7a) et (32,7c):

$$\left. \begin{aligned} \delta\theta_{xi} &= \delta\varphi_i + \frac{\psi}{r} \delta s - \frac{\varphi_i \chi}{r} \delta s - \psi \delta\chi_i, \\ \delta\theta_{yi} &= -\frac{\delta s}{r} + \delta\chi_i - \frac{a_i}{r} (\chi \delta\chi - \psi \delta\psi) + \frac{w - w_i}{r} \delta\chi + \frac{\chi}{r} (\delta w - \delta w_i) \\ &\quad + \psi \delta\varphi_i + \frac{\psi^2 + \varphi_i^2}{2r} \delta s, \\ \delta\theta_{zi} &= \delta\varphi - \frac{\varphi_i}{r} \delta s + \varphi_i \delta\chi_i - \varphi_i \delta\chi - \chi \delta\varphi_i. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

De (31,14) et (31,22) on déduit que les coordonnées d'un point de la roue par rapport au trièdre fixe peuvent s'écrire

$$\bar{p}_i = \bar{p}_{oi} + \bar{p}_i + B_i \bar{r}_i^{**}, \quad (12)$$

où selon (31,23) et (31,18)

$$B_i = A_i A_{\chi_i}^* = A_{\varphi_i} A_{\psi_i} A_{\chi_i}^*. \quad (13)$$

En variant l'équation (12) on trouve

$$\delta \bar{p}_i = \delta \bar{p}_{oi} + \delta \bar{p}_i + \delta B_i \bar{r}_i^{**},$$

soit selon (31,20)

$$\delta \bar{p}_i = \delta \bar{p}_{oi} + \delta \bar{p}_i + \delta B_i A_{\chi_i}^{*-1} \bar{r}_i^*. \quad (14)$$

Mais à l'aide de (13) on peut écrire

$$\delta B_i A_{\chi_i}^{*-1} = \delta B_i B_i^{-1} A_i; \quad (15)$$

or

$$\delta B_i B_i^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\delta\theta_{zi} & \delta\theta_{yi} \\ \delta\theta_{zi} & 0 & -\delta\theta_{xi} \\ -\delta\theta_{yi} & \delta\theta_{xi} & 0 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

et à l'aide de (10) et (31,19) on trouve

$$\delta \bar{B}_i \bar{A}^{x-1} \chi_i = \begin{pmatrix} 0 & \varphi_i \psi_i & \psi_i \\ 0 & -\varphi_i & -1 + \frac{1}{2} \varphi_i^2 + \frac{1}{2} \psi_i^2 \\ 0 & 1 - \frac{1}{2} \varphi_i^2 & -\varphi_i \end{pmatrix} \delta \varphi_i$$

$$+ \begin{pmatrix} -\psi_i & -1 + \frac{1}{2} \varphi_i^2 + \frac{1}{2} \psi_i^2 & \varphi_i \\ 1 - \frac{1}{2} \psi_i^2 & -\varphi_i & \varphi_i \psi_i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta \psi_i$$

$$\begin{pmatrix} -\varphi_i \psi_i & 0 & 1 - \frac{1}{2} \psi_i^2 \\ \varphi_i & 0 & \psi_i \\ -1 + \frac{1}{2} \varphi_i^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta s + \delta u_i \\ -\frac{\delta s + \delta u_i}{r} + \delta \chi_i \end{pmatrix}. \quad (17)$$

35. Observations cinématiques. Dans ce chapitre nous calculerons d'abord les vitesses transversales \bar{V}_i ($i=0, \dots, n$) des centres de masses de la caisse et des essieux et les vitesses angulaires $\bar{\omega}$ et $\bar{\omega}_i$ ($i=1, \dots, n$) de la caisse et des essieux. Ensuite nous déterminerons, ayant en vue les calculs à exposer dans le chapitre 46, les vitesses tangentielles dans les directions t_{xij} , t_{yij} de chaque roue par rapport au rail et la vitesse angulaire ω_{nij} autour de la direction n_{ij} de cet essieu.

La vitesse de translation du centre de masses de la caisse se trouve en dérivant la relation (31,11) par rapport au temps:

$$\bar{V}_0 = \dot{\bar{r}} = \dot{\bar{r}}_0 + \dot{\bar{p}} + \dot{\bar{A}} \bar{r}^*, \quad (1)$$

avec

$$\bar{r}^* = \bar{r}_0^* = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix} \quad (2)$$

selon (31,3). A l'aide de (31,2), (31,5) et (31,9) on trouve pour les composantes de \bar{V}_0

$$\left. \begin{aligned} V_{x0} &= \dot{s} - h\dot{\chi} - a_0(\chi\dot{\chi} + \psi\dot{\psi}), \\ V_{y0} &= \dot{v} + a_0\dot{\psi} + h\dot{\phi}, \\ V_{z0} &= \dot{w} - a_0\dot{\chi} + a_0(\phi\dot{\psi} + \psi\dot{\phi}) + h(\phi\dot{\phi} + \chi\dot{\chi}). \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Dans la détermination de la vitesse angulaire $\bar{\omega}$ nous égalons la rotation $\delta\bar{\theta}$ à la rotation réelle $d\bar{\theta}$ se présentant dans l'intervalle de temps dt . Nous avons alors

$$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\theta}}{dt} = \dot{\bar{\theta}}, \quad (4)$$

soit avec (34,5)

$$\bar{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}, \quad \omega_x = \dot{\bar{\theta}}_x, \quad \omega_y = \dot{\bar{\theta}}_y, \quad \omega_z = \dot{\bar{\theta}}_z, \quad (5)$$

et avec (34,7)

$$\omega_x = \dot{\psi} + \chi\dot{\psi}, \quad \omega_y = \dot{\chi} - \phi\dot{\psi}, \quad \omega_z = \dot{\psi} - \chi\dot{\phi}. \quad (6)$$

La vitesse de translation de l'essieu i se calcule à l'aide de (31,24). En égalant \bar{r}^* au vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, et, en différenciant

cette relation par rapport au temps nous trouvons

$$\bar{v}_i = \dot{\bar{p}}_i = \dot{\bar{p}}_{0i} + \dot{\bar{p}}_i, \quad (7)$$

soit avec les relations (31,15), (31,17) et (32,7a - 7b)

$$\left. \begin{aligned} V_{xi} &= \dot{s} + a_i(\chi\dot{\chi} - \psi\dot{\psi}) - \dot{\chi}(w - w_i) - \chi(\dot{w} - \dot{w}_i), \\ V_{yi} &= \dot{v} + a_i\dot{\psi} - a_i(\phi\dot{\chi} + \psi\dot{\phi}) + \dot{\phi}(w - w_i) + \phi(\dot{w} - \dot{w}_i), \\ V_{zi} &= \dot{w}_i. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Dans la détermination de la vitesse angulaire $\bar{\omega}_i$ de l'essieu i nous égalons la rotation virtuelle $\delta\bar{\theta}_i$ à la rotation réelle $d\bar{\theta}_i$ se présentant dans l'intervalle de temps dt ; nous trouvons avec (34,16)

$$\bar{\omega}_i = \dot{\bar{\theta}}_i, \quad \omega_{xi} = \dot{\bar{\theta}}_{xi}, \quad \omega_{yi} = \dot{\bar{\theta}}_{yi}, \quad \omega_{zi} = \dot{\bar{\theta}}_{zi}, \quad (9)$$

soit avec (34,11)

$$\left. \begin{aligned} \omega_{xi} &= \dot{\varphi}_i + \frac{\dot{\psi}}{r} s - \frac{\varphi_i \dot{\chi}}{r} s - \dot{\psi} \dot{\chi}_i, \\ \omega_{yi} &= -\frac{s}{r} + \dot{\chi}_i - \frac{a_i}{r} (\dot{\chi} \dot{\chi} - \dot{\psi} \dot{\psi}) + \frac{w - w_i}{r^2} \dot{\chi} \\ &\quad + \frac{\dot{\chi}}{r} (w - w_i) + \dot{\psi} \dot{\varphi}_i + \frac{\dot{\psi}^2 + \dot{\varphi}_i^2}{2r} s, \\ \omega_{zi} &= \dot{\psi} - \frac{\varphi_i}{r} \dot{s} + \varphi_i \dot{\chi}_i - \varphi_i \dot{\chi} - \dot{\chi} \dot{\varphi}_i. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Les composantes du vecteur $\bar{\omega}_i^*$ de la vitesse angulaire par rapport au trièdre $(o_i^*, x_i^*, y_i^*, z_i^*)$ se trouvent à l'aide de la formule

$$\bar{\omega}_i^* = \bar{A}_i^{-1} \bar{\omega}_i. \quad (11)$$

Avec (32,9) on déduit de (10)

$$\left. \begin{aligned} \omega_{xi}^* &= \dot{\varphi}_i, \\ \omega_{yi}^* &= -\frac{s}{r} + \dot{\chi}_i + \varphi_i \dot{\psi} - \frac{a_i}{r} (\dot{\chi} \dot{\chi} - \dot{\psi} \dot{\psi}) + \frac{\dot{\chi}}{r} (w - w_i) + \frac{\dot{\chi}}{r} (w - w_i), \\ \omega_{zi}^* &= \dot{\psi} - (\varphi_i \dot{\chi} + \dot{\chi} \dot{\varphi}_i). \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Calculons maintenant encore les vitesses au point de contact A_{ij} , et limitons nous aux termes linéaires. Dans un tel point le rail présente une vitesse dont les composantes par rapport au trièdre (o_i, x_i, y_i, z_i) s'écrivent

$$\bar{V}_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta_i \\ 0 & \beta_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \dot{e}_{ij} \\ 0 \end{pmatrix} = \pm \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{e}_{ij} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13a)$$

Les composantes de la vitesse de la roue par rapport à ce trièdre sont égales à

$$\bar{V}_{ij}^* = \dot{\bar{\rho}}_i - \bar{A}_i \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \dot{e}_{ij}^* \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (13b)$$

La valeur de $\dot{\bar{\rho}}_i$ se déduit de celle-ci de $\delta \bar{\rho}_i$, déterminée dans le chapitre précédant, où il faut maintenant remplacer $\delta \bar{\rho}_i$ par $\dot{\bar{\rho}}_i dt$, $\delta \varphi_i$ par $\dot{\varphi}_i dt$ etc. Le vecteur d'un point de contact est déterminé par (331,2b):

$$\bar{r}_i^* = \begin{pmatrix} \zeta_{ij}^* \\ \pm (b - \gamma_{ij}^* - e_{ij}^*) \\ r + \xi_{ij}^* \end{pmatrix}.$$

A l'aide de (13a), (13b), (34,14), (34,17), (32,7a), (32,7c), (31,15), (31,17) et (331,15) nous trouvons pour le vecteur de la vitesse relative

$$\bar{w}_{ij} = \bar{v}_{ij}^* - \bar{v}_{ij} : \quad (14)$$

$$\bar{w}_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{\dot{s}}{r} \zeta_{ij}^* + b \dot{\psi}_i + r \dot{\chi}_i \\ \dot{v}_i - \dot{\psi} s - r \dot{\varphi}_i - \dot{a}_i + \dot{e}_i \\ \frac{\dot{s}}{r} \xi_{ij}^* + \dot{w}_i + b \dot{\varphi}_i \end{pmatrix} \quad (15)$$

Nous sommes surtout intéressés dans les composantes de cette vitesse par rapport aux directions, n_{ij}, t_{xij}, t_{yij} , dont les cosinus sont données par la matrice M (332,3). On trouve sans peine que

$$\begin{pmatrix} W_{nij} \\ W_{txij} \\ W_{tyij} \end{pmatrix} = M W_{ij},$$

soit avec (331,7), (32,7^a) et (32,7^c)

$$\left. \begin{aligned} W_{nij} &= \pm (\dot{v}_1 - \dot{s}\psi - r\dot{\varphi}_1 - \dot{d}_1 \mp \dot{e}_1) \sin \gamma_{ij} + \left(\frac{\dot{s}}{r} \xi_{ij}^{\pm} + \dot{w}_1 \pm b\dot{\varphi}_1 \right) \cos \gamma_{ij}, \\ W_{txij} &= -\frac{\dot{s}}{r} \xi_{ij}^{\pm} \mp b\dot{\psi} + r\dot{\chi}_1, \\ W_{tyij} &= (\dot{v}_1 - \dot{s}\psi - r\dot{\varphi}_1 - \dot{d}_1 \mp \dot{e}_1) \cos \gamma_{ij} \mp \left(\frac{\dot{s}}{r} \xi_{ij}^{\pm} + \dot{w}_1 \pm b\dot{\varphi}_1 \right) \sin \gamma_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Or, de (331,1) on déduit les relations

$$\dot{s}\chi_{ij} = -\dot{\xi}_1 \mp b\dot{\beta}_1, \quad \dot{s}\psi_{ij} = \dot{\eta}_1, \quad (17)$$

de sorte qu'à l'aide de (331,13^b) et (32,7^c) on peut écrire

$$\frac{\dot{s}}{r} \xi_{ij}^{\pm} + \dot{w}_1 \pm b\dot{\varphi}_1 = \dot{w}_1 \pm b(\dot{\varphi}_1 - \dot{\beta}_1) \pm (\dot{s}\psi - \dot{\eta}_1) \operatorname{tg} \gamma_{ij} - \dot{\xi}_1.$$

En différenciant la relation (331,14^c) par rapport au temps on trouve que la dite expression est égale à

$$\dot{\xi}_{ij} - \dot{\xi}_{ij}^{\pm} \pm (\dot{s}\psi - \dot{\eta}_1) \operatorname{tg} \gamma_{ij};$$

de (331,3^a), (331,3^b) et (331,13^a) on déduit

$$\dot{\xi}_{ij} = \dot{\eta}_{ij} \operatorname{tg} \gamma_{ij}, \quad \dot{\xi}_{ij}^{\pm} = \dot{\eta}_{ij}^{\pm} \operatorname{tg} \gamma_{ij}, \quad (18)$$

en différenciant également la relation (331,14^b) par rapport au temps on trouve par conséquent

$$\frac{\dot{s}}{r} \xi_{ij}^{\pm} + \dot{w}_1 \pm b\dot{\varphi}_1 = \left\{ \mp (\dot{v}_1 - \dot{d}_1 - r\dot{\varphi}_1 - \dot{s}\psi) + \dot{e}_1 \right\} \operatorname{tg} \gamma_{ij}. \quad (19)$$

A l'aide de cette dernière relation on peut simplifier les expressions (16) en

$$\left. \begin{aligned} w_{nij} &= 0, \\ w_{txij} &= -\frac{\dot{s}}{r} \gamma_{ij} + b\dot{\phi} + r\dot{\chi}_i, \\ w_{tyij} &= \frac{\dot{v}_i - \dot{s}\phi - r\dot{\phi}_i - \dot{d}_i + \dot{e}_i}{\cos \gamma_{ij}}. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Nous voyons que les vitesses tangentiellles sont du même ordre que les quantités \dot{v} etc. C'est en correspondance avec l'hypothèse que la variation de l'angle χ_i est du même ordre de grandeur des angles ϕ , χ etc., faite dans le chapitre précédant. Ceci veut dire que le cas où les vitesses tangentiellles sont de l'ordre de grandeur de la vitesse \dot{s} (cas que se présente lors d'un patinage de l'essieu en question) doit être traité séparément; il faudrait alors supposer que la variation $\delta\chi_i$ serait de l'ordre de la variation $\delta s/r$.

Calculons encore la composante de la vitesse angulaire ω_{nij} de l'essieu i autour du normale n_{ij} au point de contact. Cette composante est égale à

$$\omega_{nij} = (\cos(n_{ij}, x_i) \cos(n_{ij}, y_{ij}) \cos(n_{ij}, z_i)) \begin{pmatrix} \omega_{xi} \\ \omega_{yi} \\ \omega_{zi} \end{pmatrix},$$

soit avec (332,3), (10) et (19)

$$\omega_{nij} = \mp \left(\frac{\dot{s}}{r} - \dot{\chi}_i \right) \sin \gamma_{ij} + \left(\dot{\phi} - \frac{\dot{s}}{r} \phi_i + \frac{\dot{s}}{r} \beta_i \right) \cos \gamma_{ij}. \quad (21)$$

4. Observations dynamiques. Dans ce chapitre nous donnerons d'abord un aperçu des forces qui se présentent dans le système dont nous nous occupons. Puis nous déterminerons les forces généralisées y appartenant, l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. Ensuite nous rédigerons les équations de mouvement du système et nous rechercherons si le bilan d'énergie y appartenant soit sans reste. Enfin nous indiquerons encore de quelle façon les forces polygènes du système, c'est à dire les forces qui ne peuvent pas dépendre d'un potentiel, sont liées avec les déplacements et leur dérivées.

41. Aperçu des forces. Dans les figures 4^a et 4^b nous avons représenté les forces et les moments s'appliquant respectivement à la

caisse et au i^{me} essieu du véhicule. Nous pouvons les distinguer comme suit:

a. forces de gravité. Ce sont la force de la pesanteur G_0 s'appliquant au centre de masses o_0^x de la caisse et les forces de la pesanteur G_i ($i = 1, \dots, n$) s'appliquant aux centres de masses o_i^x des essieux. Ces forces sont des forces monogènes: on peut y indiquer des potentiels.

b. forces de ressort. Appelons F_{ij} la force dans le ressort ij . En général, la force F_{ij} se compose d'une partie monogène dépendant de façon linéaire ou non linéaire de la flexion de ressort f_{ij} , et d'une partie polygène dépendant de f_{ij} et de \dot{f}_{ij} ; la dernière partie est la force amortisseur du ressort. Dans la présente publication nous ne nous occuperons qu'avec la force totale F_{ij} ; cette force devra être considérée comme une force polygène.

c. forces de liaison caisse-essieux. Ce sont les forces de liaison H_{xij} et H_{yij} appartenant respectivement aux déplacements s_{hxij} et s_{hyij} que nous avons rencontrés au chapitre 32. Elles sont respectivement parallèles à l'axe $o_i^x x_i^x$ et à l'axe $o_i^x y_i^x$. Ce sont des forces monogènes. Etant donné que nous ne détacherons jamais les liaisons entre caisse et essieux, nous ne devons pas nous occuper des forces H_{xij} et H_{yij} .

d. forces de liaison essieu-voie. Ce sont les forces N_{ij} aux points de contact roue-rail. Leur sens sont opposés aux sens des directions n_{ij} . Etant donné qu'en général il est impossible d'écrire les relations entre w_i et φ_i avec les autres coordonnées, exception faite de la forme générale (331,16), il sera nécessaire de prendre en considération les forces N_{ij} . Comme les forces mentionnées sous c elles sont des forces monogènes.

e. forces tangentielles au point de contact roue-rail. Ce sont les forces T_{xij} , T_{yij} s'appliquant aux points de contact roue-rail dans les directions t_{xij} , t_{yij} respectivement. Leurs sens sont opposés aux sens de ces directions. Ces forces sont polygènes (sauf dans le cas théorique que les surfaces du rail et de la roue sont si rêches que la roue ne glisse pas par rapport au rail, cas que ne se présente jamais en pratique); elles dépendent des vitesses de roulement et de glissement aux points de contact.

f. forces de rappel de la voie et du roue. Appelons E_{ij} la force de rappel de la voie dans le point de contact A_{ij} . Comme la force de ressort F_{ij} , en général la force E_{ij} se compose d'une partie monogène dépendant du déplacement e_{ij} , et d'une partie polygène dépendant de e_{ij} et \dot{e}_{ij} . De façon analogue avec ce qu'il y a dit sons b nous ne nous occuperons qu'avec la force totale E_{ij} . Le même vaut pour la force de rappel E_{ij}^* de la roue, qui est en général une fonction du déplacement e_{ij}^* et de sa fluxion \dot{e}_{ij}^* .

g. forces s'appliquant aux appareils de traction. Ces forces s'appliquent aux crochets de traction, supposés d'être attachés à la caisse aux points $B_{1,2}$. Soient $L_{1,2}$, $D_{1,2}$ et $V_{1,2}$ les composantes de ces forces dans les directions ox , oy et oz respectivement. En général, ces forces sont des forces polygènes.

h. moments moteur. Soit M_i le moment moteur du véhicule s'appliquant au i^{me} essieu, ainsi que sa réaction à la caisse. Comme les forces mentionnées sons g, les moments moteur se groupent dans la catégorie des forces polygènes.

En ce qui concerne les forces mentionnées sons d et e nous observons encore que nous les remplacerons souvent par les forces X_{ij} , Y_{ij} et Q_{ij} , ayant le même résultante, et s'appliquant dans les directions ox , oy , oz respectivement (les sens étant opposés). A l'aide des formules (332,3) nous trouvons pour les relations entre les forces N_{ij} , T_{xij} , T_{yij} et les forces X_{ij} , Y_{ij} , Q_{ij} :

$$\left. \begin{aligned} N_{ij} &= (\chi_{ij} \cos \gamma_{ij} \mp \phi_{ij} \sin \gamma_{ij}) X_{ij} + (\pm \sin \gamma_{ij} - \beta_i \cos \gamma_{ij}) Y_{ij} \\ &\quad + (\cos \gamma_{ij} \pm \beta_i \sin \gamma_{ij}) Q_{ij}, \\ T_{xij} &= X_{ij} + \phi_{ij} Y_{ij} - \chi_{ij} Q_{ij}, \\ T_{yij} &= (\mp \chi_{ij} \sin \gamma_{ij} - \phi_{ij} \cos \gamma_{ij}) X_{ij} + (\cos \gamma_{ij} \pm \beta_i \sin \gamma_{ij}) Y_{ij} \\ &\quad + (\mp \sin \gamma_{ij} + \beta_i \cos \gamma_{ij}) Q_{ij}, \end{aligned} \right\} (1^a)$$

ou inversement

$$X_{ij} = (\chi_{ij} \cos \gamma_{ij} \mp \phi_{ij} \sin \gamma_{ij}) N_{ij} + T_{xij} + (\mp \chi_{ij} \sin \gamma_{ij} - \phi_{ij} \cos \gamma_{ij}) T_{yij},$$

$$Y_{ij} = (\pm \sin \gamma_{ij} - \beta_{ij} \cos \gamma_{ij}) N_{ij} + \phi_{ij} T_{xij} + (\cos \gamma_{ij} \pm \beta_{ij} \sin \gamma_{ij}) T_{yij},$$

$$Q_{ij} = (\cos \gamma_{ij} \pm \beta_{ij} \sin \gamma_{ij}) N_{ij} - \chi_{ij} T_{xij} + (\mp \sin \gamma_{ij} + \beta_{ij} \cos \gamma_{ij}) T_{yij}.$$

Calculons encore la force de rappel E_{ij} , qui est égale à la composante de la force rail-roue dans la direction du déplacement e_{ij} et la force de rappel E_{ij}^* , égale à la composante de la force rail-roue dans la direction du déplacement e_{ij}^* . La première composante est égale à

$$E_{ij} = \pm (Y_{ij} + \beta_{ij} Q_{ij}). \quad (2^a)$$

La force E_{ij}^* est égale à la deuxième composante du vecteur

$$\bar{A}_i^{-1} \begin{pmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ Q_{ij} \end{pmatrix},$$

soit à

$$E_{ij}^* = \pm (-\phi X_{ij} + Y_{ij} + \varphi_i Q_{ij}), \quad (2^b)$$

comme on déduit facilement de (31,19) et (32,7^c). Pour les relations entre les forces E_{ij} , E_{ij}^* et les déplacements e_{ij} , e_{ij}^* y correspondants nous référons à ce que nous avons dit pour la relation entre la force de ressort F_{ij} et la compression f_{ij} .

Dans le chapitre suivant nous calculerons l'énergie potentielle appartenant aux forces de gravité, mentionnées sous a., et dans le chapitre 43 nous déterminerons les forces généralisées relatives aux forces mentionnées sous b et d-h. Les forces mentionnées sous c sont des forces de liaison, de sorte qu'elles ne se présentent pas dans les équations de mouvement et peuvent être laissées outre considération.

42. Energie potentielle. Le déplacement s_{go} appartenant à la force de gravité G_o est la composante dans la direction oz du vecteur $\bar{p} - \bar{p}(o)$ (31,12), dans lequel on choisit selon (35,2)

$$\bar{r}^* = \bar{r}_0^* = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Ainsi on trouve

$$s_{go} = w - a_0 \chi + a_0 \varphi \psi + \frac{1}{2} h (\varphi^2 + \chi^2). \quad (2)$$

Le déplacement s_{gi} appartenant à la force de gravité G_i est égal au déplacement vertical w_i du centre de masses o_i^* du i^{me} essieu:

$$s_{gi} = w_i \cdot (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

En somme nous trouvons pour l'énergie potentielle

$$U = - \sum_{i=0}^n G_i s_{gi}, \quad (4)$$

soit avec (2) et (3)

$$U = - G_0 (w - a_0 \chi) - G_0 a_0 \varphi \psi - \frac{1}{2} G_0 h (\varphi^2 + \chi^2) - \sum_{i=1}^n G_i w_i. \quad (5)$$

43. Forces généralisées. Le déplacement s_{fij} appartenant à la force de ressort F_{ij} , mentionnée sous b dans le chapitre 41, est égal à

$$s_{fij} = - f_{ij}. \quad (1)$$

A l'aide de (32,8) on trouve pour la variation de ce déplacement

$$\delta s_{fij} = - \delta w + (a_i \mp b_i \psi) \delta \chi \mp (b_i \pm a_i \psi) \delta \varphi - (a_i \varphi \pm b_i \chi) \delta \psi + \delta w_i \pm b_i \delta \varphi_i. \quad (2)$$

Au lieu des variations δs_{nij} , δs_{txij} , δs_{tyij} des déplacements appartenant aux forces mentionnées sous d et e dans le chapitre 41, calculons les variations δs_{xij} , δs_{yij} , δs_{qij} appartenant aux forces X_{ij} , Y_{ij} , Q_{ij} , mentionnées à la fin de ce chapitre. Dans ce but, partons de la relation (34,14):

$$\delta \bar{p}_i = \delta \bar{p}_{oi} + \delta \bar{p}_i + \delta \bar{B}_i \bar{A}_i^{*-1} \bar{r}_i^*. \quad (3)$$

Lorsque nous choisissons pour \bar{r}_i^* le vecteur d'un point de contact rail-roue, déterminé par (331,2b):

$$\bar{r}_i^{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \xi_{ij}^{\mathbf{x}} \\ \pm (b - \eta_{ij}^{\mathbf{x}} - e_{ij}^{\mathbf{x}}) \\ r + \zeta_{ij}^{\mathbf{x}} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

le vecteur de la variation du déplacement de la roue dans ce point de contact est égal à

$$\delta \bar{p}_i - \bar{A}_i \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \delta e_{ij}^{\mathbf{x}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur de la variation du déplacement du rail dans le point de contact s'écrit

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\beta_i \\ 0 & \beta_i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \delta e_{ij}^{\mathbf{x}} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \delta e_{ij}^{\mathbf{x}} \\ \pm \beta_i \delta e_{ij}^{\mathbf{x}} \end{pmatrix}.$$

Le contraire du vecteur des déplacements virtuels δs_{xij} , δs_{yij} , δs_{qij} est égal à la différence des deux derniers vecteurs:

$$-\begin{pmatrix} \delta s_{xij} \\ \delta s_{yij} \\ \delta s_{qij} \end{pmatrix} = \delta \bar{p}_i - \bar{A}_i \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \delta e_{ij}^{\mathbf{x}} \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \pm \delta e_{ij}^{\mathbf{x}} \\ \pm \beta_i \delta e_{ij}^{\mathbf{x}} \end{pmatrix} \quad (5)$$

(le signe moins résulte du fait que les sens de direction des forces X_{ij} , Y_{ij} , Q_{ij} sont opposés aux sens de direction des axes du trièdre (o_i, x_i, y_i, z_i)). Avec (3), (4), (31,15), (31,17), (31,19) et (34,17) on trouve des relations pour δs_{xij} , δs_{yij} , δs_{qij} , dans lesquelles on peut encore éliminer u_i , v_i et ψ_i à l'aide de (32,7^a) - (32,7^c); voici le résultat:

$$\begin{aligned} \delta s_{xij} = & \zeta_{ij}^{\mathbf{x}} \frac{\delta s}{r} + b \varphi_i \delta \chi_i \left[\pm (b - \eta_{ij}^{\mathbf{x}} - e_{ij}^{\mathbf{x}}) - r \varphi_i \right] \delta \psi - (r \psi \pm b \chi) \delta \varphi_i \\ & - (r + \zeta_{ij}^{\mathbf{x}}) \delta \chi_i + \psi \delta e_{ij}^{\mathbf{x}}, \end{aligned} \quad (6^a)$$

$$\begin{aligned}
\delta s_{yij} = & (\psi + \frac{\xi_{ij}^*}{r} \varphi_i + \frac{\eta_{ij}^*}{r} \psi - \varphi_i \chi) \delta s - \delta v - \varphi \delta w \\
& - (w - w_i - a_i \chi) \delta \varphi + a_i \varphi \delta \chi - (a_i + \xi_{ij}^* + b\psi) \delta \psi \\
& + \varphi \delta w_i + (r \pm b \varphi_i + \eta_{ij}^*) \delta \varphi_i - r \psi \delta \chi_i \pm \delta e_{ij} \pm \delta e_{ij}^*, \quad (6^b) \\
\delta s_{qij} = & - \frac{\xi_{ij}^*}{r} \delta s - \delta w_i - \left\{ \pm (b - \eta_{ij}^* - e_{ij}^*) - r \varphi_i \right\} \delta \varphi_i \\
& + \xi_{ij}^* \delta \chi_i \pm \beta_i \delta e_{ij} \pm \varphi_i \delta e_{ij}^*. \quad (6^c)
\end{aligned}$$

Les variations des déplacements s_{eij} et s_{eij}^* appartenant aux forces E_{ij} et E_{ij}^* mentionnées sous f dans le chapitre 41 sont simplement égaux à

$$\delta s_{eij} = -\delta e_{ij}, \quad \delta s_{eij}^* = -\delta e_{ij}^*. \quad (7)$$

Les déplacements $s_{l1,2}$, $s_{d1,2}$ et $s_{v1,2}$ appartenant aux forces mentionnées sous g dans le chapitre 41 se calculent à l'aide de la formule (31,12). En substituant pour \bar{r}^* le vecteur d'un point d'application, soit selon la figure 1

$$\bar{r}^* = \begin{pmatrix} l_{1,2} \\ 0 \\ -h_{1,2} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

on trouve

$$\bar{\rho} - \bar{\rho}(0) = \begin{pmatrix} s_{l1,2} \\ s_{d1,2} \\ s_{v1,2} \end{pmatrix}, \quad (9)$$

ou

$$\left. \begin{aligned}
s_{l1,2} &= s - h_{1,2} \chi - \frac{1}{2} l_{1,2} (\chi^2 + \psi^2), \\
s_{d1,2} &= v + h_{1,2} \varphi + l_{1,2} \psi, \\
s_{v1,2} &= w - l_{1,2} \chi + l_{1,2} \varphi \psi + \frac{1}{2} h_{1,2} (\varphi^2 + \chi^2).
\end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Les variations de ces déplacements s'écrivent par conséquent

$$\left. \begin{aligned} \delta s_{l1,2} &= \delta s - (h_{1,2} + l_{1,2}\chi)\delta\chi - l_{1,2}\psi\delta\psi, \\ \delta s_{d1,2} &= \delta v + h_{1,2}\delta\varphi + l_{1,2}\delta\psi, \\ \delta s_{v1,2} &= \delta w + (h_{1,2}\varphi + l_{1,2}\psi)\delta\varphi - (l_{1,2} - h_{1,2}\chi)\delta\chi + l_{1,2}\varphi\delta\psi. \end{aligned} \right\} (11)$$

Calculons enfin la variation du déplacement s_{mi} appartenant au moment moteur s'appliquant au i^{me} essieu. Cette variation est égale à la composante dans la direction $o^x y^x$ du contraire du vecteur

$$A^{-1} \delta \bar{\theta}_{mi},$$

$\delta \bar{\theta}_{mi}$ étant égal au déplacement angulaire du i^{me} essieu par rapport à la caisse:

$$\delta \bar{\theta}_{mi} = \delta \bar{\theta}_i - \delta \bar{\theta}. \quad (12)$$

A l'aide des formules (34,7), (34,11) et (32,9) on trouve

$$\begin{aligned} \delta s_{mi} &= \frac{\delta s}{r} - \frac{\chi}{r} \delta w - \psi \delta \varphi + \left(1 - \frac{w - a_i \chi - w_i}{r}\right) \delta \chi \\ &\quad - \left(\varphi + \frac{a_i \psi}{r}\right) \delta \psi + \frac{\chi}{r} \delta w_i - \delta \chi_i. \end{aligned} \quad (13)$$

Les formules (2), (6^a) - (6^c), (11) et (13) nous mettent à même de calculer les forces généralisées appartenant aux coordonnées s , v etc. Or, nous trouvons

$$Q_S = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (X_{i1} \zeta_{i1}^* + X_{i2} \zeta_{i2}^*) + \psi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (Y_{i1} \zeta_{i1}^* + Y_{i2} \zeta_{i2}^*) \varphi_i + \frac{\psi}{r} \sum_{i=1}^n (Y_{i1} \zeta_{i1}^* + Y_{i2} \zeta_{i2}^*) \varphi_i + \frac{\psi}{r} \sum_{i=1}^n (Y_{i1} \zeta_{i1}^* + Y_{i2} \zeta_{i2}^*) \varphi_i + \frac{\psi}{r} \sum_{i=1}^n (Y_{i1} \zeta_{i1}^* + Y_{i2} \zeta_{i2}^*) \varphi_i \quad (14a)$$

$$- \chi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) \varphi_i - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (Q_{i1} \zeta_{i1}^* + Q_{i2} \zeta_{i2}^*) + L_1 + L_2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n M_i,$$

$$Q_V = - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) + D_1 + D_2,$$

$$Q_W = - \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) - \varphi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) + V_1 + V_2 - \frac{\chi}{r} \sum_{i=1}^n M_i,$$

$$Q_\varphi = - \sum_{i=1}^n (F_{i1} - F_{i2}) b_i - \psi \sum_{i=1}^n (F_{i1} + Y_{i2}) a_i - w \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2})$$

$$+ \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) w_i + \chi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) a_i + D_1 h_1 + D_2 h_2 + (V_1 h_1 + V_2 h_2) \varphi + (V_1 \ell_1 + V_2 \ell_2) \psi - \psi \sum_{i=1}^n M_i,$$

$$Q_\chi = \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) a_i - \psi \sum_{i=1}^n (F_{i1} - F_{i2}) b_i - b \sum_{i=1}^n (X_{i1} - X_{i2}) \varphi_i$$

$$+ \varphi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) a_i - (L_1 h_1 + L_2 h_2) - (L_1 \ell_1 + L_2 \ell_2) \chi$$

$$- (V_1 \ell_1 + V_2 \ell_2) + (V_1 h_1 + V_2 h_2) \chi + \sum_{i=1}^n M_i - \frac{w}{r} \sum_{i=1}^n M_i + \frac{\chi}{r} \sum_{i=1}^n M_i a_i + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n M_i w_i, \quad (14b)$$

$$Q_\psi = - \varphi \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) a_i - \chi \sum_{i=1}^n (F_{i1} - F_{i2}) b_i + b \sum_{i=1}^n (X_{i1} - X_{i2})$$

$$- \sum_{i=1}^n X_{i1} (\zeta_{i1}^* + e_{i1}) + \sum_{i=1}^n X_{i2} (\zeta_{i2}^* + e_{i2}) - r \sum_{i=1}^n (X_{i1} + X_{i2}) \varphi_i$$

$$- \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) a_i - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} \zeta_{i1}^* + Y_{i2} \zeta_{i2}^*) + b \psi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} - Y_{i2})$$

$$- (L_1 \ell_1 + L_2 \ell_2) \psi + D_1 \ell_1 + D_2 \ell_2 + (V_1 \ell_1 + V_2 \ell_2) \varphi - \varphi \sum_{i=1}^n M_i - \frac{\psi}{r} \sum_{i=1}^n M_i a_i,$$

$$\begin{aligned}
 Q_{wi} &= F_{i1} + F_{i2} + (Y_{i1} + Y_{i2})\varphi - (Q_{i1} + Q_{i2}) + \frac{\chi}{r} M_i, \\
 Q_{\varphi i} &= (F_{i1} - F_{i2})b_i - (X_{i1} + X_{i2})r\psi - (X_{i1} - X_{i2})b\chi \\
 &\quad + (Y_{i1} + Y_{i2})r + (Y_{i1} - Y_{i2})b\varphi_i + Y_{i1}\xi_{i1}^{\bar{x}} + Y_{i2}\xi_{i2}^{\bar{x}} \\
 &\quad - (Q_{i1} - Q_{i2})b + Q_{i1}(\eta_{i1}^{\bar{x}} + e_{i1}^{\bar{x}}) - Q_{i2}(\eta_{i2}^{\bar{x}} + e_{i2}^{\bar{x}}) \\
 &\quad + (Q_{i1} + Q_{i2})r\varphi_i,
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} (i=1, \dots, n) \\ (14^c) \end{array} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 Q_{\chi i} &= - (X_{i1} + X_{i2})r - (X_{i1}\xi_{i1}^{\bar{x}} + X_{i2}\xi_{i2}^{\bar{x}}) - (Y_{i1} + Y_{i2})r\psi \\
 &\quad + Q_{i1}\xi_{i1}^{\bar{x}} + Q_{i2}\xi_{i2}^{\bar{x}} - M_i,
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{eij} &= \pm (Y_{ij} + Q_{ij}\beta_i) - E_{ij}, \\
 Q_{eij}^{\bar{x}} &= \pm (-X_{ij}\psi_i + Y_{ij} + Q_{ij}\varphi_i) - E_{ij}^{\bar{x}}.
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (i=1, \dots, n; \\ j=1, 2) \end{array} \quad (14^d)$$

Les formules (14^d) correspondent bien avec les relations (41,2^a) et (41,2^b).

Dans la première formule (14^a) se présentent quelques termes de deuxième ordre. Dans les équations de mouvement ces termes peuvent être négligés par rapport aux autres termes. Cependant ces termes doivent être pris en considération lorsqu'on veut vérifier le bilan énergétique du système.

44. Energie cinétique. L'énergie cinétique T_0 de la caisse se calcule à l'aide de la formule

$$\begin{aligned}
 2T_0 &= \frac{G_0}{g} (V_{x0}^2 + V_{y0}^2 + V_{z0}^2) + I_{x0}\omega_x^{\bar{x}2} - 2I_{xzo}\omega_x^{\bar{x}}\omega_z^{\bar{x}} \\
 &\quad + I_{yo}\omega_y^{\bar{x}2} + I_{zo}\omega_z^{\bar{x}2},
 \end{aligned} \quad (1)$$

les composantes V_{x0} , V_{y0} , V_{z0} de la vitesse du centre de masses de la caisse étant déterminées par (35,3); les quantités $\omega_x^{\bar{x}}$, $\omega_y^{\bar{x}}$, $\omega_z^{\bar{x}}$ représentent les composantes par rapport au trièdre (\bar{o} , \bar{x} , \bar{y} , \bar{z}) de la vitesse angulaire de la caisse. On vérifie sans peine qu'on peut égaler ces composantes aux composantes ω_x , ω_y , ω_z de ce vecteur, déterminées par (35,6). Les quantités G_0 , I_{x0} , I_{y0} , I_{z0} représentent le poids de la caisse et ses moments d'inertie autour des axes par son centre de masse parallèles aux axes du trièdre

$(o^{\mathbb{X}}, x^{\mathbb{X}}, y^{\mathbb{X}}, z^{\mathbb{X}})$ respectivement; la quantité I_{xzo} est le produit d'inertie autour des axes par ce centre parallèles aux axes $o^{\mathbb{X}}x^{\mathbb{X}}$ et $o^{\mathbb{X}}z^{\mathbb{X}}$. A l'aide des formules (35,3) et (35,6) on trouve

$$2T_o = \frac{G_o}{g} \left\{ \dot{s}^2 - 2hs\dot{\chi} - 2a_o\dot{s}(\chi\dot{\chi} + \phi\dot{\phi}) + h^2\dot{\chi}^2 + (\dot{v} + h\dot{\phi} + a_o\dot{\phi})^2 + (\dot{w} - a_o\dot{\chi})^2 + I_{xo}\dot{\phi}^2 - 2I_{xzo}\dot{\phi}\dot{\chi} + I_{yo}\dot{\chi}^2 + I_{zo}\dot{\phi}^2 \right\}. \quad (2)$$

De la même façon l'énergie cinétique T_i du i^{me} essieu se calcule comme

$$2T_i = \frac{G_i}{g} (V_{xi}^2 + V_{yi}^2 + V_{zi}^2) + I_i(\omega_{xi}^2 + \omega_{zi}^2) + I_{yi}\omega_{yi}^2, \quad (3)$$

les vitesses V_{xi} , V_{yi} , V_{zi} et les vitesses angulaire ω_{xi} , ω_{yi} , ω_{zi} étant déterminées par (35,8) et (35,12) respectivement, tandis que, G_i est le poids de l'essieu, I_{yi} son moment d'inertie autour de l'axe $o_i^{\mathbb{X}}y_i^{\mathbb{X}}$, et I_i son moment d'inertie autour de l'axe $o_i^{\mathbb{X}}x_i^{\mathbb{X}}$, qui est égal à celui-ci autour de l'axe $o_i^{\mathbb{X}}z_i^{\mathbb{X}}$. On trouve

$$2T_i = \frac{G_i}{g} \left\{ \dot{s}^2 + 2a_i\dot{s}(\chi\dot{\chi} - \phi\dot{\phi}) - 2\dot{s}\dot{\chi}(w - w_i) - 2\chi\dot{s}(\dot{w} - \dot{w}_i) + (\dot{v} + a_i\dot{\phi})^2 + \dot{w}_i^2 \right\} + I_i(\dot{\phi}_i^2 + \dot{\chi}_i^2) + I_{yi} \left\{ \frac{\dot{s}^2}{r^2} - 2\dot{\chi}_i\frac{\dot{s}}{r} + \dot{\chi}_i^2 - \frac{2s\dot{\phi}}{r} \phi_i + \frac{2a_i\dot{s}}{r^2}(\chi\dot{\chi} - \phi\dot{\phi}) - 2\frac{\dot{s}\dot{\chi}}{r^2}(w - w_i) - 2\chi\frac{\dot{s}(\dot{w} - \dot{w}_i)}{r^2} \right\}. \quad (4)$$

Etant donné que l'axe $o^{\mathbb{X}}y^{\mathbb{X}}$ passe par le centre de masses du véhicule total, on a

$$\sum_{i=0}^n G_i a_i = G_o a_o + \sum_{i=1}^n G_i a_i = 0. \quad (5^a)$$

Puis nous introduisons le poids total G du véhicule, ainsi que les moments d'inertie I_x , I_y , I_z , le produit d'inertie I_{xz} se rapportant au trièdre $(o^{\mathbb{X}}, x^{\mathbb{X}}, y^{\mathbb{X}}, z^{\mathbb{X}})$ et la quantité I . Ils sont déterminés par

$$G = \sum_{i=0}^n G_i = G_o + \sum_{i=1}^n G_i, \quad (5^b)$$

$$\left. \begin{aligned} I_x &= I_{x0} + \frac{G_o h^2}{g}, \quad I_y = I_{y0} + \frac{G_o}{g} (a_o^2 + h^2), \\ I_z &= I_{z0} + \sum_{i=1}^n I_i + \frac{1}{g} \sum_{i=0}^n G_i a_i^2, \quad I_{xz} = I_{xz0} - \frac{G_o a_o h}{g}, \\ I &= \sum_{i=1}^n I_{yi}. \end{aligned} \right\} \quad (5^c)$$

On trouve alors pour l'énergie cinétique totale

$$T = \sum_{i=0}^n T_i = T_o + \sum_{i=1}^n T_i \quad (6)$$

du véhicule:

$$\begin{aligned} 2T &= \left(\frac{G}{g} + \frac{I}{r^2} \right) \dot{s}^2 - \frac{2G_o h}{g} \dot{s} \dot{\chi} \\ &\quad - 2 \frac{G_o a_o}{g} \dot{s} (\dot{\chi} \dot{\psi} + \dot{\psi} \dot{\phi}) - \frac{2\dot{s}}{r} \sum_{i=1}^n I_{yi} (\dot{\chi}_i + \dot{\phi}_{\psi i}) \\ &\quad + 2 \dot{s} \sum_{i=1}^n \left(\frac{G_i}{g} + \frac{I_{yi}}{r^2} \right) \left\{ a_i (\dot{\chi} \dot{\psi} - \dot{\psi} \dot{\phi}) - \dot{\chi} (\dot{w} - \dot{w}_i) - \dot{\chi} (\dot{w} - \dot{w}_i) \right\} \\ &\quad + \frac{G}{g} \dot{v}^2 + \frac{2G_o h}{g} \dot{v} \dot{\phi} + \frac{G_o}{g} \dot{w}^2 - \frac{2G_o a_o}{g} \dot{w} \dot{\chi} \\ &\quad + I_x \dot{\psi}^2 - 2I_{xz} \dot{\psi} \dot{\phi} + I_y \dot{\chi}^2 + I_z \dot{\phi}^2 + \frac{1}{g} \sum_{i=1}^n G_i \dot{w}_i^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^n I_i \dot{\phi}_i^2 + \sum_{i=1}^n I_{yi} \dot{\chi}_i^2. \end{aligned} \quad (7)$$

45. Equations de mouvement. Les expressions (43,7), (42,5) et (42,14^a) - (42,14^d) pour l'énergie cinétique, l'énergie potentielle et les forces généralisées nous mettent à même d'établir les équations de mouvement pour le véhicule considéré. A l'aide de la méthode de Lagrange, exposée dans le chapitre 23, nous trouvons

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{G}{g} + \frac{I}{r^2} \right) \ddot{s} - \frac{G_o h}{g} \ddot{\chi} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n I_{yi} \ddot{\chi}_i - \frac{G_o a_o}{g} (\ddot{\chi} \dot{\psi} + \dot{\chi} \ddot{\psi} + \dot{\chi}^2 + \dot{\psi}^2) \\ - \sum_{i=1}^n \left(\frac{G_i}{g} + \frac{I_{yi}}{r^2} \right) \left\{ (\dot{w} - \dot{w}_i - a_i \dot{\chi}) \ddot{\chi} + (\dot{w} - \dot{w}_i - a_i \dot{\chi}) \dot{\chi} + (\dot{w} - \dot{w}_i) \dot{\chi} \right. \\ \left. + (\ddot{w} - \ddot{w}_i) \dot{\chi} + a_i (\ddot{\psi} \dot{\phi} + \dot{\psi} \ddot{\phi}) \right\} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n I_{yi} (\dot{\phi} \dot{\phi}_i + \dot{\psi} \ddot{\phi}_i) = Q_s, \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{G}{g} \ddot{v} + \frac{G_o h}{g} \ddot{\varphi} &= Q_v, \\ - \ddot{s} \chi \sum_{i=1}^n \left(\frac{G_i}{g} + \frac{I_{yi}}{r^2} \right) + \frac{G_o}{g} \ddot{w} - \frac{G_o a_o}{g} \ddot{\chi} - G_o &= Q_w, \end{aligned} \right\} \quad (1^a)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{G_o h}{g} \ddot{v} + I_x \ddot{\varphi} - I_{xz} \ddot{\psi} - G_o h \varphi - G_o a_o \psi &= Q_\varphi, \\ - \frac{G_o h}{g} \ddot{s} - \frac{G_o a_o}{g} \ddot{s} \chi - \ddot{s} \sum_{i=1}^n \left(\frac{G_i}{g} + \frac{I_{yi}}{r^2} \right) (w - a_i \chi - w_i) \\ - \frac{G_o a_o}{g} \ddot{w} + I_y \ddot{\chi} - G_o h \chi + G_o a_o &= Q_\chi, \\ - \frac{\ddot{s} \psi}{r^2} \sum_{i=1}^n I_{yi} a_i - \frac{\ddot{s}}{r} \sum_{i=1}^n I_{yi} \dot{\varphi}_i - I_{xz} \ddot{\varphi} + I_z \ddot{\psi} \\ - \frac{\dot{s}}{r} \sum_{i=1}^n I_{yi} \dot{\psi}_i - G_o a_o \psi &= Q_\psi, \end{aligned} \right\} \quad (1^b)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{G_i}{g} + \frac{I_{yi}}{r^2} \right) \ddot{s} \chi + \frac{G_i}{g} \ddot{w}_i - G_i &= Q_{wi}, \\ I_i \ddot{\varphi}_i + \frac{I_{yi}}{r} \dot{s} \psi &= Q_{\varphi i}, \\ - \frac{I_{yi}}{r} \ddot{s} + I_{yi} \ddot{\chi}_i &= Q_{\chi i}, \end{aligned} \right\} \quad (i=1, \dots, n) \quad (1^c)$$

$$0 = Q_{eij}, \quad 0 = Q_{eij}^{\mathbf{x}}, \quad (i=1, \dots, n; j=1, 2) \quad (1^d)$$

les forces généralisées Q_k étant données par (43,14^a) - (43,14^d).

En comparaisant les équations pour ψ et φ_i les termes de couplage gyroscopique

$$- I_{yi} \frac{\dot{s}}{r} \dot{\varphi}_i \quad \text{et} \quad I_{yi} \frac{\dot{s}}{r} \dot{\psi}$$

attirent l'attention.

Une deuxième observation sur les équations se fait en considérant le cas que le véhicule se trouve au repos dans une position centrale sur une voie parfaite, les forces $F_{1,2}$, $D_{1,2}$, $V_{1,2}$ et les moments M_i étant égaux à zéro. Lorsqu'on pose $\dot{s}=0$, $\ddot{s}=0$, et $v, \dots, e_{ij}^{\mathbf{x}}$ avec leur dérivées égales à zéro, les équations pour w, χ

46. Relations entre les forces de ressort, les forces de rappel du rail et de la roue, les forces aux points de contact rail-roue et les coordonnées du système. Dans le chapitre 41 nous avons déjà fait quelques observations sur les forces F_{ij} et E_{ij} . En ce qui concerne la force de ressort F_{ij} , dans un nombre de cas on pourra la diviser dans une force de rappel et une force de frottement, qui dépendent de façon linéaire de la flexion f_{ij} et sa dérivée respectivement, de sorte qu'on peut écrire pour la relation entre la force et la flexion

$$F_{ij} = F_{oi} + \frac{1}{2} c_i f_{ij} + \frac{1}{2} k_i \dot{f}_{ij}, \quad (i=1, \dots, n; j=1, 2) \quad (1)$$

F_{oi} étant la valeur de la force dans une position centrale du véhicule mentionnée déjà dans le chapitre précédent, $\frac{1}{2} c_i$ la rigidité du ressort, et $\frac{1}{2} k_i$ sa constante d'amortissement.

De façon analogue on peut écrire souvent pour les forces de rappel E_{ij} et E_{ij}^*

$$\left. \begin{aligned} E_{ij} &= E_{oi} + \frac{1}{2} c_o e_{ij} + \frac{1}{2} k_o \dot{e}_{ij}, \\ E_{ij}^* &= E_{oi}^* + \frac{1}{2} c_o^* e_{ij}^* + \frac{1}{2} k_o^* \dot{e}_{ij}^*. \end{aligned} \right\} i=1, \dots, n; j=1, 2) \quad (2)$$

Les forces E_{oi} et E_{oi}^* se calculent à l'aide des relations (41, 2^a) et (41, 2^b) ou (43, 14d):

$$E_{oi} = E_{oi}^* = \pm Y_{oij}, \quad (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

Y_{oij} étant la valeur de Y_{ij} dans une position centrale du véhicule au repos sur une voie parfaite. Or, dans cette position toutes les angles γ_{ij} ont la valeur γ_0 , tandis qu'alors les forces tangentielles T_{xij} et T_{yij} sont zero. C'est pourquoi on tire des relations (41, 1b)

$$Y_{oij} = \pm N_{oi} \sin \gamma_0, \quad Q_{oi} = N_{oi} \cos \gamma_0, \quad (4)$$

et

$$E_{oi} = E_{oi}^* = Q_{oi} \operatorname{tg} \gamma_0, \quad (5)$$

les quantités N_{oi} et Q_{oi} représentant les valeurs N_{ij} et Q_{ij} dans la dite position respectivement.

Des relations (41,2^a) et (41,2^b) on déduit que la différence entre les forces E_{ij} et E_{ij}^{\times} est du premier ordre. Dans la plupart des cas on peut donc évaluer ces deux forces. Lorsqu'en outre les constantes d'amortissement k_0 et k_0^{\times} sont zéro, on peut écrire

$$E_{ij} = E_{ij}^{\times} = Q_{oi} \operatorname{tg} \gamma_0 = \frac{1}{2} c_r (e_i \pm d_i), \quad (6)$$

e_i et d_i étant les quantités déterminées par (331,15), et c_r étant la rigidité de l'ensemble du rail et de la roue:

$$c_r = \frac{c_0 c_0^{\times}}{c_0 + c_0^{\times}}. \quad (7)$$

En appelant

$$E_i = E_{i1} + E_{i2}, \quad D_i = E_{i1} - E_{i2} \quad (8)$$

on a aussi

$$E_i = 2 Q_{oi} \operatorname{tg} \gamma_0 + c_r e_i, \quad D_i = c_r d_i. \quad (9)$$

Discutons maintenant les relations entre les coordonnées et leur dérivées, et les rapports des forces tangentielles T_{xij} , T_{yij} et la force normale N_{ij} . Pour une vitesse de glissement du même ordre de grandeur que la vitesse V , et une vitesse angulaire ω_{ni} très faible, on peut admettre que la résultante

$$T_{ij} = \sqrt{T_{xij}^2 + T_{yij}^2} \quad (10)$$

de T_{xij} et T_{yij} est constante et égale au coefficient de friction μ . C'est l'hypothèse d'où partent la plupart des investigateurs allemands du mouvement quasi-statique en courbe. En général, cependant, les choses sont plus compliquées, étant donné que le rail et le bandage ne peuvent pas être considérés comme des corps parfaitement rigides au voisinage du point de contact. Il se produit alors le phénomène dit de pseudo-glissement.

Introduisons les dites forces tangentielles réduites

$$\tau_{xij} = \frac{T_{xij}}{N_{ij}}, \quad \tau_{yij} = \frac{T_{yij}}{N_{ij}}. \quad (11)$$

Or, ces forces réduites dépendent en premier lieu des composantes v_{xij} , v_{yij} du dit glissement réduit \bar{v}_{ij} , égal au rapport de la vitesse relative au point de contact roue-rail et de la moyenne de la vitesse avec laquelle ce point se meut le long du rail et de la vitesse correspondante le long de la roue; en outre les forces réduites dépendent du rapport de la vitesse angulaire normale ω_{nij} au point de contact à la vitesse moyenne que nous venons de mentionner.

Cette vitesse moyenne est en première approximation égale à \dot{s} , de sorte qu'on trouve pour le glissement réduit et ses composantes

$$\bar{v}_{ij} = \frac{W_{tij}}{\dot{s}}, \quad v_{xij} = \frac{W_{txij}}{\dot{s}}, \quad v_{yij} = \frac{W_{tyij}}{\dot{s}}. \quad (12)$$

On tire par conséquent de (35,20)

$$\left. \begin{aligned} v_{xij} &= -\frac{\xi_{ij}^*}{r} + \frac{\dot{\phi} + b\dot{\psi} + r\dot{\chi}_i}{\dot{s}}, \\ v_{yij} &= -\frac{\phi}{\cos \gamma_{ij}} + \frac{\left(1-r \frac{\partial \phi_i}{\partial v_i}\right)(\dot{v}_i - \dot{d}_i) - \left(\pm 1 + r \frac{\partial \phi_i}{\partial e_i}\right)\dot{e}_i}{\dot{s} \cos \gamma_{ij}}. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Dans la dernière formule nous avons encore tenu compte du fait que selon (331,16) ϕ_i ne dépend que des deux variables $v_i - d_i$ et e_i . De plus, le rapport de la vitesse angulaire normale et la vitesse moyenne avec laquelle le point de contact se déplace, est selon (35,21)

$$\frac{\omega_{nij}}{\dot{s}} = \mp \frac{1}{r} \sin \gamma_{ij} - \frac{\phi_i - \phi_j}{r} \cos \gamma_{ij} + \frac{\dot{\phi} \cos \gamma_{ij} \pm \dot{\chi}_i \sin \gamma_{ij}}{\dot{s}}, \quad (14)$$

formule dans laquelle on peut le plus souvent se restreindre au premier terme, les autres termes étant de premier ordre.

En outre les dimensions de l'ellipse limitant l'aire de contact rail-roue jouent un rôle important. En désignant les demi-axes de cette ellipse correspondant respectivement aux directions t_{xij} et t_{yij} par a_{ij} et b_{ij} , et en égalant le module d'élasticité E et le coefficient de contraction ν du rail aux constantes ana-

logues de la roue, on a [23]

$$\begin{aligned} a_{ij} &= m_{ij} \left\{ \frac{3N_{ij}(1-\nu^2)}{E \left| \frac{1}{\rho_{yij}} + \frac{1}{\rho_{xij}} + \frac{1}{\rho_{yij}} \right|} \right\}^{1/3}, \\ b_{ij} &= n_{ij} \left\{ \frac{3N_{ij}(1-\nu^2)}{E \left| \frac{1}{\rho_{yij}} + \frac{1}{\rho_{xij}} + \frac{1}{\rho_{yij}} \right|} \right\}^{1/3}, \end{aligned} \quad (15)$$

formules où les constantes m_{ij} et n_{ij} dépendent de l'angle ψ_{ij} , déterminé par

$$\cos \psi_{ij} = \frac{-\frac{1}{\rho_{xij}} + \frac{1}{\rho_{yij}} + \frac{1}{\rho_{yij}}}{\frac{1}{\rho_{xij}} + \frac{1}{\rho_{yij}} + \frac{1}{\rho_{yij}}}. \quad (16)$$

Dans le tableau II on trouve quelques valeurs pour m_{ij} et n_{ij} comme fonctions de ψ_{ij} . Dans les formules (15) et (16) les rayons de courbure ρ_{yij} , ρ_{xij} et ρ_{yij} sont respectivement déterminées par les formules (332,7), (332,8^a) et (332,8^b).

Nous tirons l'attention du lecteur au fait que souvent a_{ij} représentent la demi-axe la plus petite et b_{ij} la demi-axe la plus grande, tandis qu'ordinairement on désigne la demi-axe la plus grande par a et la demi-axe la plus petite par b .

Discutons le cas où $\omega_{nij} = 0$ plus en détail. Pour la relation entre la valeur absolue v_{ij} du glissement réduit \bar{v}_{ij} et la valeur absolue τ_{ij} de la force tangentielle réduite $\bar{\tau}_{ij}$ Levi [24] a indiqué la loi

$$\frac{1}{\tau_{ij}} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\chi_{ij} v_{ij}}. \quad (17)$$

Après, Chartet [25] a indiqué la loi analogue

$$\frac{1}{\tau_{ij}^2} = \frac{1}{\mu^2} + \frac{1}{\chi_{ij}^2 v_{ij}^2}. \quad (18)$$

Ces lois doivent être considérées comme approximatives. En réalité la relation entre τ_{ij} et v_{ij} est beaucoup plus compliquée, spécialement dans les cas où ainsi la composante v_{xij} de \bar{v}_{ij} que la com-

posante v_{yij} diffère de zéro. Tant que ce problème n'est pas encore étudié suffisamment, on pourrait se contenter en utilisant la loi de Chartet et en écrivant pour les composantes de \bar{r}_{ij}

$$\tau_{xij} = \frac{\kappa_{ij} v_{xij}}{\sqrt{1 + \frac{\kappa_{ij}^2 v_{ij}^2}{\mu^2}}}, \quad \tau_{yij} = \frac{\kappa_{ij} v_{yij}}{\sqrt{1 + \frac{\kappa_{ij}^2 v_{ij}^2}{\mu^2}}}, \quad (19)$$

avec

$$v_{ij} = \sqrt{v_{xij}^2 + v_{yij}^2}. \quad (20)$$

Pour le coefficient de pseudo-glissement κ_{ij} , Kalker [26] a trouvé dans le cas où $a_{ij} = b_{ij}$, et où le coefficient de contraction $v = 0$

$$\kappa_{ij} = \frac{16Ea_{ij}^2}{3\pi N_{ij}}. \quad (21)$$

Dans le cas analogue où le coefficient de contraction v diffère de zéro, un glissement dans la direction t_{xij} se fera avec un coefficient κ_{xij} différant du coefficient κ_{yij} appartenant au glissement dans la direction t_{yij} , de sorte que pour des glissements réduits très bas

$$\tau_{xij} = \kappa_{xij} v_{xij}, \quad \tau_{yij} = \kappa_{yij} v_{yij}. \quad (22)$$

Dans le tableau III on trouve quelques valeurs pour κ_{xij} et κ_{yij} comme fonctions de v . On ne voit pas exactement comment le glissement se fera pour des glissements réduits plus élevés.

Le cas où les deux demi-axes de l'ellipse limitant l'aire de contact diffèrent l'un de l'autre, est encore plus compliqué. Dans ce cas les coefficients κ_{xij} et κ_{yij} sont différents déjà pour $v = 0$.

Il faudra encore à faire beaucoup de recherches dans le domaine de ces problèmes de contact, spécialement en ce qui concerne l'influence de la différence des deux demi-axes a_{ij} et b_{ij} , en ce qui concerne l'influence du coefficient de contraction v et en ce qui concerne l'influence de la vitesse angulaire ω_{ni} .

5. Simplification des équations de mouvement. Dans la rédaction des équations de mouvement (45,1^a) - (45,1^d) nous avons pris en considération toutes les termes de deuxième ordre dans les expressions pour le travail virtuel et l'énergie potentielle, tandis que dans l'énergie cinétique nous n'avons pas négligé les termes de deuxième ordre qui contiennent la vitesse \dot{s} . De même, dans la rédaction des équations à l'aide des lois fondamentales de la mécanique rationnelle, il faut prendre en considération toutes les produits d'une force ou un moment avec un déplacement v , w etc. ou sa dérivée, ce qui revient à ce qu'on suppose que les forces et les moments s'appliquent au véhicule dans sa position déplacée.

Or, il est possible de simplifier le calcul en supposant dans la rédaction des équations de mouvement que les forces et les moments s'appliquent au véhicule dans une position où seulement la coordonnée s diffère de zéro. En utilisant la méthode de Lagrange, il faut alors négliger les termes de deuxième ordre dans les expressions pour le travail virtuel et l'énergie potentielle, et négliger dans l'énergie cinétique les termes de deuxième ordre qui contiennent la vitesse \dot{s} . Cette simplification revient à ce qu'on remplace la "théorie de deuxième ordre", Elle a encore l'avantage accessoire que dans le cas où les forces $E_{ij} = E_{ij}^*$ sont relatives aux déplacements e_{ij} et e_{ij}^* y correspondant, seulement les sommes $e_{ij} + e_{ij}^*$ se présentent dans les équations de mouvement, de sorte qu'on peut réduire le nombre des équations de $6+7n$ à $6+5n$.

Dans le chapitre présent nous élaborerons ce cours des idées plus en détail. Cependant nous ferons une exception pour la force de la pesanteur G_0 . Cette force s'applique au véhicule à un point situé à peu près au plan $y=-h$, tandis que les autres forces s'appliquent, soit à l'hauteur des centres des essieux, soit à l'hauteur des rails. Or, la déviation latérale du centre de masse o_0 de la caisse peut être plus élevée que les déviations latérales des essieux (qui sont limitées à cause du contact entre boudin et rail). C'est pourquoi nous laisserons les termes de deuxième ordre dans l'expression pour l'énergie potentielle, tandis que nous les négligerons dans les expressions pour les forces généralisées.

Dans le chapitre présent nous traiterons le cas où les forces de ressort se comportent de façon linéaire. Puis nous indiquerons de quelle manière on peut introduire des quantités sans dimension.

Enfin nous traiterons le cas linéaire plus en détail, en supposant la voie d'être parfaite.

51. Théorie de premier ordre. Comme nous l'avons mentionné plus haut, nous utiliserons de nouveau l'expression (42,5) pour l'énergie potentielle du système

$$U = -G_0(w - a_0\chi) - G_0 a_0 \varphi \psi - \frac{1}{2} G_0 h (\varphi^2 + \chi^2) - \sum_{i=1}^n G_i w_i . \quad (1)$$

Simplifions ensuite les expressions (43,14^a)-(43,14d) pour les forces généralisées. D'abord nous considérerons les relations (41,1^a) et (41,1^b) entre les forces N_{ij} , T_{xij} , T_{yij} et les forces X_{ij} , Y_{ij} et Q_{ij} . Ces relations se réduisent maintenant à

$$\left. \begin{aligned} N_{ij} &= \pm Y_{ij} \sin \gamma_{ij} + Q_{ij} \cos \gamma_{ij} , \\ T_{xij} &= X_{ij} , \\ T_{yij} &= Y_{ij} \cos \gamma_{ij} \mp X_{ij} \sin \gamma_{ij} , \end{aligned} \right\} \quad (2^a)$$

et

$$\left. \begin{aligned} X_{ij} &= T_{xij} , \\ Y_{ij} &= \pm N_{ij} \sin \gamma_{ij} + T_{yij} \cos \gamma_{ij} , \\ Q_{ij} &= N_{ij} \cos \gamma_{ij} \mp T_{yij} \sin \gamma_{ij} . \end{aligned} \right\} \quad (2^b)$$

Dans la suite nous remplacerons toujours les forces X_{ij} par les forces T_{xij} .

Commençons avec les forces Q_{eij} et Q_{eij}^* , et supposons que les forces E_{ij} et E_{ij}^* sont relatives aux déplacements e_{ij} et e_{ij}^* respectivement, de sorte qu'on peut les évaluer selon (46,6). Les équations (43,14^d) se réduisent alors à

$$Q_{eij} = Q_{eij}^* = \pm Y_{ij} - L_{ij} . \quad (3)$$

Remplaçons maintenant les 4n coordonnées e_{ij} et e_{ij}^* par les 2n coordonnées d_i et e_i (331,15)

$$e_{ij} + e_{ij}^* = e_i \pm d_i . \quad (4)$$

Les forces généralisées Q_{di} et Q_{ei} se calculent alors à l'aide de la condition que le travail virtuel des forces Q_{eij} et Q_{eij}^* doit être égal à celui des forces Q_{di} et Q_{ei} :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (Q_{eij} \delta e_{ij} + Q_{eij}^* \delta e_{ij}^*) = \sum_{i=1}^n (Q_{di} \delta d_i + Q_{ei} \delta e_i). \quad (5)$$

Avec (3), (4) et (46, 81) nous trouvons

$$Q_{di} = Y_{i1} + Y_{i2} - D_i, \quad Q_{ei} = Y_{i1} - Y_{i2} - E_i. \quad (6)$$

Maintenant nous classerons les déplacements dans les deux catégories:

a) $s, w, \chi, w_i, \chi_i, e_i$;

b) $v, \varphi, \psi, \varphi_i, d_i$,

de sorte qu'en correspondance avec le tableau I les déplacements du catégorie a décrivent le mouvement symétrique, tandis que ceux du catégorie b décrivent le mouvement latéral. Les forces généralisées pour les déplacements s'écrivent

$$\begin{aligned} Q_s = & \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (T_{xi1} \xi_{i1}^* + T_{xi2} \xi_{i2}^*) + \psi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) \\ & - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (Q_{i1} \xi_{i1}^* + Q_{i2} \xi_{i2}^*) + L_1 + L_2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n M_i, \\ Q_w = & - \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) + V_1 + V_2, \\ Q_\chi = & \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) a_i - (L_1 h_1 + L_2 h_2) - (V_1 \ell_1 + V_2 \ell_2) + \sum_{i=1}^n M_i, \end{aligned} \quad (7a)$$

$$\left. \begin{aligned} Q_{wi} &= F_{i1} + F_{i2} - (Q_{i1} + Q_{i2}), \\ Q_{\chi i} &= - (T_{xi1} + T_{xi2}) r - M_i, \\ Q_{ei} &= Y_{i1} - Y_{i2} - E_i, \end{aligned} \right\} \quad (i=1, \dots, n) \quad (7b)$$

$$\left. \begin{aligned}
 Q_v &= - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) + D_1 + D_2, \\
 Q_\varphi &= - \sum_{i=1}^n (F_{i1} - F_{i2}) b_i + D_1 h_1 + D_2 h_2, \\
 Q_\psi &= b \sum_{i=1}^n (T_{xi1} - T_{xi2}) - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) a_i + D_1 \ell_1 + D_2 \ell_2,
 \end{aligned} \right\} (7c)$$

$$\left. \begin{aligned}
 Q_{\varphi i} &= (F_{i1} - F_{i2}) b_i + (Y_{i1} + Y_{i2}) r - (Q_{i1} - Q_{i2}) b, \\
 Q_{di} &= Y_{i1} + Y_{i2} - D_{i1}.
 \end{aligned} \right\} (i=1, \dots, n) \quad (7d)$$

La puissance P des forces généralisées s'écrit maintenant

$$\begin{aligned}
 P &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (T_{xij} \dot{s}_{txij} + Y_{ij} \dot{s}_{yij} + Q_{ij} \dot{s}_{qij} + F_{ij} \dot{s}_{fij}) \\
 &+ \sum_{i=1}^n (D_i \dot{s}_{di} + E_i \dot{s}_{ei}) + \sum_{k=1}^2 (L_k \dot{s}_{lk} + D_k \dot{s}_{dk} + V_k \dot{s}_{vk}) \\
 &+ \sum_{i=1}^n M_i \dot{s}_{mi},
 \end{aligned} \quad (8)$$

avec

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{s}_{txij} &= \frac{\dot{s}_{ij}^*}{r} \pm b \dot{\psi} - r \dot{\chi}_i, \\
 \dot{s}_{yij} &= \dot{s}_\psi - \dot{v} - a_i \dot{\psi} + r \dot{\phi}_i + \dot{d}_i \pm \dot{e}_i, \\
 \dot{s}_{qij} &= -\frac{\dot{s}_{ij}^*}{r} - \dot{w}_i \mp b \dot{\phi}_i, \quad \dot{s}_{fij} = -\dot{f}_{ij} = -(\dot{w} - a_i \dot{\chi} - \dot{w}_i) \mp b_i (\dot{\phi} - \dot{\phi}_i), \\
 \dot{s}_{di} &= -\dot{d}_i, \quad \dot{s}_{ei} = -\dot{e}_i,
 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} (i=1, \dots, n; \\ (j=1, 2) \end{array} \quad (9a)$$

$$\dot{s}_{\ell 1,2} = \dot{s} - h_{1,2} \dot{\chi}, \quad \dot{s}_{d1,2} = \dot{v} + h_{1,2} \dot{\psi} + \ell_{1,2} \dot{\psi}, \quad \dot{s}_{v1,2} = \dot{w} - \ell_{1,2} \dot{\chi}, \quad (9b)$$

$$\dot{s}_{mi} = \frac{\dot{s}}{r} + \dot{\chi} - \dot{\chi}_i. \quad (i=1, \dots, n) \quad (9c)$$

Enfin l'expression (44,7) pour l'énergie cinétique se réduit à

$$T = T_a + T_b \quad (10)$$

avec

$$2T_a = \left(\frac{G}{g} + \frac{I}{r^2}\right) \dot{s}^2 - \frac{2G_o h}{g} \dot{s} \dot{\chi} - \frac{2\dot{s}}{r} \sum_{i=1}^n I_{yi} \dot{\chi}_i + \frac{G_o}{g} \dot{w}^2 - \frac{2G_o a_o}{g} \dot{w} \dot{\chi} + I_y \dot{\chi}^2 + \frac{1}{g} \sum_{i=1}^n G_i \dot{w}_i^2 + \sum_{i=1}^n I_{yi} \dot{\chi}_i^2, \quad (11a)$$

$$2T_b = \frac{G}{g} \dot{\varphi}^2 + \frac{2G_o h}{g} \dot{\varphi} \dot{\phi} + I_x \dot{\phi}^2 - 2 I_{xz} \dot{\phi} \dot{\psi} + I_z \dot{\psi}^2 + \sum_{i=1}^n I_i \dot{\phi}_i^2. \quad (11b)$$

Avec les relations (1), (7a) - (7d) et (10) les équations de mouvement s'écrivent

$$\begin{aligned} \left(\frac{G}{g} + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{s} - \frac{G_o h}{g} \ddot{\chi} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n I_{yi} \ddot{\chi}_i &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (T_{xi1} \xi_{i1}^* + T_{xi2} \xi_{i2}^*) \\ &+ \psi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (Q_{i1} \xi_{i1}^* + Q_{i2} \xi_{i2}^*) + L_1 + L_2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n M_i = Q_s, \\ \frac{G_o}{g} \ddot{w} - \frac{G_o a_o}{g} \ddot{\chi} - G_o &= - \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) + V_1 + V_2 = Q_w, \\ - \frac{G_o h}{g} \ddot{s} - \frac{G_o a_o}{g} \ddot{w} + I_y \ddot{\chi} + G_o a_o - G_o h \chi &= \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) a_i \\ &- (L_1 h_1 + L_2 h_2) - (V_1 \ell_1 + V_2 \ell_2) + \sum_{i=1}^n M_i = Q_\chi, \\ \frac{G_i}{g} \ddot{w}_i - G_i &= F_{i1} + F_{i2} - (Q_{i1} + Q_{i2}) = Q_{wi}, \quad (i=1, \dots, n) \\ - \frac{\dot{s}}{r} I_{yi} + I_{yi} \ddot{\chi}_i &= - (T_{xi1} + T_{xi2}) r - M_i = Q_{xi}, \quad (i=1, \dots, n) \\ 0 &= Y_{i1} - Y_{i2} - E_i = Q_{ei}, \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\frac{G}{g} \ddot{v} + \frac{G_o h}{g} \ddot{\varphi} = - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) + D_1 + D_2 = Q_v ,$$

$$\frac{G_o h}{g} \ddot{v} + I_x \ddot{\varphi} - I_{xz} \ddot{\psi} - G_o h \varphi - G_o a_o \psi = - \sum_{i=1}^n (F_{i1} - F_{i2}) b_i + D_1 h_1 + D_2 h_2 = Q_\varphi ,$$

$$-I_{xz} \ddot{\varphi} + I_z \ddot{\psi} - G_o a_o \varphi = b \sum_{i=1}^n (T_{xi1} - T_{xi2}) - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) a_i + D_1 \ell_1 + D_2 \ell_2 = Q_\psi , \quad (12b)$$

$$I_i \ddot{\varphi}_i = (F_{i1} - F_{i2}) b_i + (Y_{i1} + Y_{i2}) r - (Q_{i1} - Q_{i2}) b = Q_{\varphi i} , \quad (i=1, \dots, n)$$

$$0 = Y_{i1} + Y_{i2} - D_i = Q_{di} , \quad (i=1, \dots, n)$$

Leur nombre est égal à $6+5n$. Les forces $L_{1,2}$, $D_{1,2}$, $V_{1,2}$ et les moments M_i sont prescrites. Les forces F_{ij} , D_i et E_i se déduisent directement des déplacements par des relations comme (46,1) et (46,9). Les forces Y_{ij} et Q_{ij} peuvent être exprimées en T_{yij} et N_{ij} à relations (2b), dans lesquelles les angles γ_{ij} sont des fonctions de $v_i - d_i$ et e_i , selon ce que nous avons dit dans le chapitre 331, tandis que selon (32,7b)

$$v_i = v + a_i \psi . \quad (i=1, \dots, n) \quad (13)$$

Ainsi nous pouvons considérer comme inconnues les $6+5n$ déplacements s, \dots, e_i et en outre les $6n$ forces N_{ij} , T_{xij} , T_{yij} .

Or, outre les $6+5n$ équations (12a) et (12b) nous disposons encore des $4n$ relations entre les forces tangentielle T_{xij} , T_{yij} , les forces normales N_{ij} , les glissements réduits ν_{xij} , ν_{yij} et les vitesses angulaires normales ω_{nij} (qui selon (46,13) et (46,14) dépendent de façon linéaire des déplacements et leur dérivées), par exemple les relations (46,19). En outre nous avons encore les $2n$ relations (331,16), de sorte qu'en principe le problème est complètement déterminé.

A la fin du chapitre 331 nous avons observé que souvent la possibilité existe qu'une roue ait contact avec le rail y correspondant en deux points au lieu d'un. Pendant un intervalle de temps dans lequel un tel phénomène se présente, il y a encore une force normale et deux forces tangentielles supplémentaires, que nous appellerons N_{ij}^* et T_{xij}^* , T_{yij}^* respectivement. Les $6+5n$ équations de mouvement, les $4n$ relations entre les forces tangentielles, les forces normales et les coordonnées, et les $2n$ relations entre les coordonnées restent valables; il y a en plus encore une relation

entre les quantités $v_i - d_i$ et e_i se rapportant à l'essieu où le contact en deux points a lieu, et deux relations pour les forces tangentielles T_{xij}^* , T_{yij}^* , la force normale N_{ij}^* et les coordonnées, de sorte que de nouveau le problème est complètement défini.

On vérifie sans peine qu'aussi pour les équations (12a) et (12b) le bilan énergétique est sans reste.

Abstraction faite des termes de premier ordre on peut découpler la première équation (12a) des autres équations en introduisant la variable

$$u = - \frac{\frac{G_0 h}{g} \chi + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n I_{yi} \chi_i}{\frac{G}{g} + \frac{I}{r^2}} \quad (14)$$

et en remplaçant la coordonnée s par la coordonnée

$$s^* = s + u. \quad (15)$$

L'expression (1) pour l'énergie potentielle ne se modifie pas. En écrivant l'expression pour le travail virtuel des forces Q_s , Q_χ et Q_{χ_i} et celui des forces Q_s^* , Q_χ et Q_{χ_i} , et en les égalant, on trouve

$$Q_s^* = Q_s, \quad (16a)$$

tandis que les expressions (7a) pour les forces généralisées Q_χ et Q_{χ_i} devront être remplacées par

$$Q_\chi = \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) a_i - (L_1 h_1 + L_2 h_2) - (V_1 \ell_1 + V_2 \ell_2) + \sum_{i=1}^n M_i + \frac{G_0 h/g}{G/g + I/r^2} (L_1 + L_2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n M_i), \quad (16b)$$

$$Q_{\chi_i} = - (T_{xi1} + T_{xi2}) r - M_i + \frac{I_{yi}/r}{G/g + I/r^2} (L_1 + L_2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n M_i)$$

Enfin l'expression (11a) pour l'énergie cinétique T_a s'écrit

$$\begin{aligned}
2T_a = & \left(\frac{G}{g} + \frac{I}{r^2} \right) \dot{s}^2 + \frac{G_o}{g} \dot{w}^2 - \frac{2 G_o a_o}{g} \dot{w} \dot{\chi} \\
& + I_y \dot{\chi}^2 - \frac{\left(\frac{G_o h}{g} \dot{\chi} + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n I_{yi} \dot{\chi}_i \right)^2}{G/g + I/r^2} + \frac{1}{g} \sum_{i=1}^n G_i \dot{w}_i^2 \\
& + \sum_{i=1}^n I_{yi} \dot{\chi}_i^2.
\end{aligned} \tag{17}$$

Avec (16a), (16b), les expressions (7a) pour Q_s , Q_w , Q_{wi} et Q_{ei} , et (17), on trouve pour les équations différentielles du mouvement symétrique

$$\begin{aligned}
\left(\frac{G}{g} + \frac{I}{r^2} \right) \ddot{s} &= \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (T_{xi1} \xi_{i1}^* + T_{xi2} \xi_{i2}^*) + \psi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) \\
&- \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (Q_{i1} \xi_{i1}^* + Q_{i2} \xi_{i2}^*) + L_1 + L_2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n M_i = Q_s^*, \\
\frac{G_o}{g} \ddot{w} - \frac{G_o a_o}{g} \ddot{\chi} - G_o &= - \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) + V_1 + V_2 = Q_w, \\
-\frac{G_o a_o}{g} \ddot{w} + I_y \ddot{\chi} - \frac{G_o h}{g} \frac{\ddot{\chi} + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n I_{yi} \ddot{\chi}_i}{G/g + I/r^2} + G_o a_o - G_o h \chi &= \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) a_i \\
- (L_1 h_1 + L_2 h_2) - (V_1 \ell_1 + V_2 \ell_2) + \sum_{i=1}^n M_i + \frac{G_o h/g}{G/g + I/r^2} (L_1 + L_2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n M_i) &= Q_\chi,
\end{aligned} \tag{18a}$$

$$\frac{G_1}{g} \ddot{w}_1 - G_1 = F_{11} + F_{12} - (Q_{11} + Q_{12}) = Q_{w1},$$

$$I_{y1} \ddot{\chi}_1 - \frac{I_{y1}}{r} \frac{G_0 h}{G/g + I/r^2} \ddot{\chi}_1 + \sum_{i=1}^n \frac{I_{yi}}{r} \ddot{\chi}_i = -(T_{x11} + T_{x12})r - M_1$$

$$+ \frac{I_{y1}/r}{G/g + I/r^2} (L_1 + L_2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n M_i),$$

(i=1,...,n)
(18b)

$$0 = Y_{11} - Y_{12} - E_1 = Q_{e1}.$$

Or, nous voyons que, abstraction faite des termes de premier ordre, la première équation (18a) ne contient que la variable s^* , de sorte qu'elle est indépendante des autres équations de mouvement. Le mouvement décrit par la coordonnée s^* nous appelons le mouvement fondamental; le mouvement décrit par les autres coordonnées de la catégorie a, ainsi que celles de la catégorie b, nous désignons comme mouvement parasite.

Il faut encore faire l'observation que la coordonnée s se présente aussi dans les expressions (46,13) pour les glissements réduits. Mais ici on peut égaler s à la nouvelle coordonnée s^* sans plus, étant donné que la différence ne cause qu'une erreur d'ordre supérieur.

52. Le véhicule avec des ressorts linéaires à amortissement visqueux. Etudions maintenant le cas d'un véhicule dans lequel les ressorts se comportent de façon linéaire, aussi quant à l'élasticité que quant à l'amortissement, de sorte que la loi (46,1)

$$F_{ij} = F_{oi} + \frac{1}{2} c_{ij} \dot{f}_{ij} + \frac{1}{2} k_{ij} f_{ij} \quad (1)$$

est valable, dans laquelle les forces F_{oi} dans une position d'équilibre sur une voie parfaite satisfont aux équations (45,2a) - (45,2c). Supposons aussi que la voie et les roues sont également linéaires, mais sans amortissement, si bien que les relations (46,9)

$$D_i = c_r \dot{d}_i, E_i = 2Q_{oi} \operatorname{tg} \gamma_o + c_r \dot{e}_i \quad (2)$$

sont valables.

Dans l'étude présent nous nous restreindrons au cas

$$L_{1,2} = D_{1,2} = V_{1,2} = 0, M_i = 0. \quad (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

Ensuite nous supposons que dans les équations (18a) et (18b) les couplages dynamiques entre les termes avec $\ddot{\chi}$ et $\ddot{\chi}_i$ sont négligeables, et que les expressions

$$\frac{I_{yi}/r^2}{G/g + I/r^2} \quad (4)$$

se présentant dans les coefficients de $\ddot{\chi}_i$ dans (18b) sont négligeables par rapport à l'unité.

Avec (1) et (32,8) nous avons

$$\left. \begin{aligned} F_{i1} + F_{i2} &= 2F_{oi} + k_i (\dot{w} - a_i \dot{\chi} - \dot{w}_i) + c_i (w - a_i \chi - w_i), \\ F_{i1} - F_{i2} &= k_i b_i (\dot{\varphi} - \dot{\varphi}_i) + c_i b_i (\varphi - \varphi_i). \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

En posant maintenant

$$I_y^* = I_y - \frac{G_o^2 h^2 / g^2}{G/g + I/r^2}, \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} c &= \sum_{i=1}^n c_i, \quad c \ell_c = \sum_{i=1}^n c_i a_i, \quad c \ell_{ca}^2 = \sum_{i=1}^n c_i a_i^2, \quad c \ell_{cb}^2 = \sum_{i=1}^n c_i b_i^2, \\ k &= \sum_{i=1}^n k_i, \quad k \ell_k = \sum_{i=1}^n k_i a_i, \quad k \ell_{ka}^2 = \sum_{i=1}^n k_i a_i^2, \quad k \ell_{kb}^2 = \sum_{i=1}^n k_i b_i^2, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

on peut transformer les équations (51,18a) et (51,18b) en

$$\left(\frac{G}{g} + \frac{I}{r^2}\right) \ddot{s}^* = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (T_{x11} \zeta_{i1}^* + T_{x12} \zeta_{i2}^*) + \psi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (Q_{i1} \zeta_{i1}^* + Q_{i2} \zeta_{i2}^*) + L_1 + L_2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n M_i,$$

$$\frac{G_0}{g} \ddot{w} - \frac{G_0 a_0}{g} \ddot{\chi} + k \dot{w} - k \ell_k \dot{\chi} - \sum_{i=1}^n k_i \dot{w}_i + c w - c \ell_c \dot{\chi} - \sum_{i=1}^n c_i \dot{w}_i = 0,$$

$$\frac{-G_0 a_0}{g} \ddot{w} + I_y \ddot{\chi} - k \ell_k \dot{w} + k \ell_{ka} \dot{\chi} + \sum_{i=1}^n k_i a_i \dot{w}_i$$

$$-c \ell_c \dot{w} + (c \ell_{ca}^2 - G_0 h) \dot{\chi} + \sum_{i=1}^n c_i a_i \dot{w}_i = 0,$$

$$\frac{G_i}{g} \ddot{w}_i - k_i \dot{w}_i + k_i a_i \dot{\chi} + k_i \dot{w}_i - c_i \dot{w}_i + c_i a_i \dot{\chi} + c_i \dot{w}_i = -(Q_{i1} + Q_{i2}) + 2Q_{oi},$$

$$I_{yi} \ddot{\chi}_i = -(T_{x11} + T_{x12})r, \quad c_{re_i} = Y_{i1} - Y_{i2} - 2Q_{oi} \tan \gamma_0. \quad (i=1, \dots, n)$$

Des équations (51, 12b) on déduit

$$\frac{G}{g} \ddot{v} + \frac{G_0 h}{g} \ddot{\psi} = - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}),$$

$$\frac{G_0 h}{g} \ddot{v} + I_x \ddot{\psi} - I_{xz} \ddot{\psi} + k \ell_{kb} \dot{\psi} - \sum_{i=1}^n k_i b_i \dot{\psi}_i$$

$$+ (c \ell_{cb}^2 - G_0 h) \dot{\psi} - G_0 a_0 \dot{\psi} - \sum_{i=1}^n c_i b_i \dot{\psi}_i = 0,$$

$$- I_{xz} \ddot{\psi} + I_z \ddot{\psi} - G_0 a_0 \dot{\psi} = b \sum_{i=1}^n (T_{x11} - T_{x12}) - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} - Y_{i2}) a_i,$$

$$I_i \ddot{\psi}_i - k_i b_i \dot{\psi}_i + k_i b_i \dot{\psi}_i - c_i b_i \dot{\psi}_i + c_i b_i \dot{\psi}_i = (Y_{i1} + Y_{i2})r - (Q_{i1} - Q_{i2})b,$$

$$c_{rd_i} = Y_{i1} + Y_{i2}. \quad (i=1, \dots, n)$$

Lorsque les relations (3) sont valables de façon exacte, nous tirons de l'équation (8a) que l'accélération \ddot{s}^* n'est pas exactement zéro, Sa valeur est faible par rapport aux accélérations \ddot{w} , etc. Par conséquent la vitesse $V = \dot{s}^*$ (9) du véhicule se diminue légèrement. Lorsqu'on veut laisser V constant, les forces $L_{1,2}$ et les moments M_i ne peuvent pas exactement être égaux à zéro; il faut que

$$L_1 + L_2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n M_i = -\frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (T_{x11} \xi_{i1}^* + T_{x12} \xi_{i2}^*) - \psi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (Q_{i1} \xi_{i1}^* + Q_{i2} \xi_{i2}^*). \quad (10)$$

Cette quantité est d'ordre inférieur aux autres forces, de sorte que le fait que nous avons négligé $L_{1,2}$ et M_i dans les autres équations (8a) et (8b) est justifié aussi dans ce cas.

Les forces de rappel du contact rail-roue E_i et D_i sont maintenant monogènes et peuvent être dérivées d'un potentiel. C'est aussi partiellement le cas avec les forces de ressort F_{ij} . On trouve que l'énergie potentielle appartenant aux équations (8a) et (8b) peut maintenant s'écrire

$$U = U_a + U_b, \quad (11)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} 2U_a &= c w^2 - 2c \ell_c w \chi - 2w \sum_{i=1}^n c_i w_i + (c \ell_{ca}^2 - G_o h) \chi^2 \\ &\quad + 2\chi \sum_{i=1}^n c_i a_i w_i + \sum_{i=1}^n c_i w_i^2 + c_r \sum_{i=1}^n e_i^2, \\ 2U_b &= (c \ell_{cb}^2 - G_o h) \varphi^2 - 2G_o a_o \varphi \psi - 2\varphi \sum_{i=1}^n c_i b_i^2 \varphi_i \\ &\quad + \sum_{i=1}^n c_i b_i \varphi_i^2 + c_r \sum_{i=1}^n d_i^2, \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

tandis que les forces généralisées polygènes sont données par

$$Q_s = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (T_{xi1} \zeta_{i1}^* + T_{xi2} \zeta_{i2}^*) + \psi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2})$$

$$- \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n (Q_{i1} \zeta_{i1}^* + Q_{i2} \zeta_{i2}^*) + L_1 + L_2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n M_i,$$

$$\dot{Q}_w = -k\dot{w} + k\ell_k \dot{\chi} + \sum_{i=1}^n k_i \dot{w}_i,$$

$$\dot{Q}_\chi = k\ell_k \dot{w} - k\ell_{ka}^2 \dot{\chi} - \sum_{i=1}^n k_i a_i \dot{w}_i,$$

$$\dot{Q}_{wi} = k_i \dot{w} - k_i a_i \dot{\chi} - k_i \dot{w}_i - (Q_{i1} + Q_{i2}) + 2Q_{oi},$$

$$\dot{Q}_{\chi i} = - (T_{xi1} + T_{xi2}) r - M_i, \quad \dot{Q}_{ei} = Y_{i1} - Y_{i2} - 2Q_{oi} \tan \gamma_0, \quad (i=1, \dots, n)$$

$$\dot{Q}_v = - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}),$$

$$\dot{Q}_\varphi = -k\ell_{kb}^2 \dot{\varphi} + \sum_{i=1}^n k_i b_i^2 \dot{\varphi}_i,$$

$$Q_\psi = b \sum_{i=1}^n (T_{xi1} - T_{xi2}) - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) a_i,$$

$$\dot{Q}_{\varphi i} = k_i b_i^2 \dot{\varphi} - k_i b_i^2 \dot{\varphi}_i + (Y_{i1} + Y_{i2})^r - (Q_{i1} - Q_{i2}) b,$$

$$Q_{di} = Y_{i1} + Y_{i2}. \quad (i=1, \dots, n)$$

Les expressions (51,17) et (51,11b)

$$2T_a = \left(\frac{G}{g} \frac{I}{r^2} \right) \dot{s}^2 + \frac{G_o}{g} \dot{w}^2 - 2 \frac{G_o a_o}{g} \dot{w} \dot{\chi} + I_y \dot{\chi}^2 + \frac{1}{g} \sum_{i=1}^n G_i \dot{w}_i^2 + \sum_{i=1}^n I_{yi} \dot{\chi}_i^2,$$

$$2T_b = \frac{G}{g} \dot{v}^2 + 2 \frac{G_o h}{g} \dot{v} \dot{\varphi} + I_x \dot{\varphi}^2 - 2 I_{xz} \dot{\varphi} \dot{\psi} + \sum_{i=1}^n I_i \dot{\varphi}_i^2$$

pour les deux parties de l'énergie cinétique restent les mêmes, abstraction faite de la simplification des coefficients des termes avec $\dot{\chi}^2$, $\dot{\chi}\dot{\chi}_i$ et $\dot{\chi}_i^2$. Les expressions (12) peuvent être trouvées directement en augmentant l'énergie potentielle (51,1) de la pesanteur avec les énergies des ressorts et de l'élasticité latérale de la voie et des roues.

En calculant la puissance P des forces polygènes (13a) et (13b) on trouve à l'aide de (51,9a), (51,2b) et (35,16)

$$P = P_t + P_f, \quad (15)$$

avec

$$P_t = \dot{s}^* (L_1 + L_2 + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^n M_i), \quad (16a)$$

$$P_f = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^2 (T_{xij} \dot{w}_{xij} + T_{yij} \dot{w}_{yij} + K_{ij} \dot{f}_{ij}), \quad (16b)$$

P_t étant la puissance des forces de traction $L_{1,2}$ et des moments de propulsion M_i ($i=1, \dots, n$), tandis que P_f est égal à la puissance de frottement, c.à.d. au travail par unité de temps des forces T_{xij} et T_{yij} et de la force de frottement du ressort ij

$$K_{ij} = \frac{1}{2} k_i \dot{f}_{ij} \quad (17)$$

qui est transformé en chaleur. La puissance ($-P_f$) est toujours positive. Si elle est plus élevée que la puissance P_t le véhicule se stabilise, c.à.d., les mouvements parasites diminuent, tandis que dans le cas contraire le véhicule se comporte de façon instable.

En observant les équations (8a) et (8b) on trouve qu'en général les déplacements w, χ, w_i, χ_i et e_i du mouvement symétrique ne sont pas indépendants des déplacements du mouvement latéral. Seulement dans le cas où

$$\left. \begin{aligned} v=0, \quad \varphi=0, \quad \psi=0, \quad \varphi_i=0, \quad d_i=0 \\ \gamma_{i1}=\gamma_{i2}, \quad N_{i1}=N_{i2}, \quad T_{x i1}=T_{x i2}, \quad T_{y i1}=-T_{y i2}, \\ Q_{i1}=Q_{i2}, \quad Y_{i1}=-Y_{i2} \end{aligned} \right\} \quad (i=1, \dots, n) \quad (18)$$

(de sorte que le mouvement latéral est zéro), le mouvement symétrique peut se présenter tout seul. En général les mouvements ne sont pas indépendants l'un de l'autre que lorsqu'il est permis de linéariser les équations de mouvement.

53. Introduction de quantités sans dimension. Indiquons maintenant de quelle manière les équations de mouvement (52,8a) et (52,8b) et les relations y appartenant peuvent être simplifiées par l'introduction de quantités sans dimension.

Dans ce but, introduisons la longueur de comparaison ℓ (qui devra être choisie d'une façon bien propre au problème, et qui est de l'ordre de grandeur de l'empattement du véhicule) et la longueur de comparaison σ , qui est égal au demi-jeu latéral d'un essieu dans la voie. Introduisons aussi la vitesse de comparaison

$$w = \sqrt{\frac{K \ell g}{G}} \quad (1)$$

où K est égal à

$$K = 2 \sum_{i=1}^n \omega_{oi} \kappa_{oi}, \quad (2a)$$

κ_{oi} étant la valeur de κ_{ij} au cas où le véhicule se trouve au repos dans une position centrale sur une voie parfaite. Appelons

$$\rho_i = \frac{2\omega_{oi}}{G}; \quad (i=1, \dots, n) \quad (3)$$

au lieu de (2a) nous pouvons écrire alors

$$K = G \sum_{i=1}^n \rho_i \kappa_{oi}. \quad (2b)$$

Appelons

$$\omega_w = \sqrt{\frac{cg}{G_o}}, \quad \omega_\varphi = \sqrt{\frac{c\ell_{cb}^2 - G_o h}{I_x}}, \quad \omega_\chi = \sqrt{\frac{c\ell_{ca}^2 - G_o h}{I_y^*}}; \quad (4)$$

on vérifie sans peine que ces quantités sont respectivement les fréquences angulaires propres du tangage, du roulis et du galop, résultant de l'équation (52,8a) pour w , de (52,8b) pour φ et de (52,8a) pour χ au cas où les couplages avec les autres coordonnées du système sont supprimés, et dans l'absence d'amortissement des ressorts.

Maintenant nous posons

$$T = \frac{\ell}{w} \underline{t}, \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} s &= l \underline{s}, \quad u = l \underline{u}, \quad s^* = l \underline{s}^*, \quad w = \sigma \underline{w} \sqrt{\frac{K}{c \ell}}, \\ \chi &= \sigma \chi \sqrt{\frac{K}{(c \ell_{ca}^2 - G_o h) \ell}}, \quad w_i = \frac{\sigma b}{r} \underline{w}_i, \quad \chi_i = \frac{\sigma}{r} \underline{\chi}_i, \quad e_i = \sigma \underline{e}_i, \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

$$v = \sigma \underline{v}, \quad \varphi = \sigma \underline{\varphi} \sqrt{\frac{K}{(c \ell_{cb}^2 - G_o h) \ell}}, \quad \psi = \frac{\sigma}{\ell} \underline{\psi}, \quad \varphi_i = \frac{\sigma}{r} \underline{\varphi}_i, \quad d_i = \sigma \underline{d}_i. \quad (6b)$$

Avec les énergies potentielles sans dimension

$$U = \frac{K \sigma^2}{\ell} \underline{U}, \quad U_a = \frac{K \sigma^2}{\ell} \underline{U}_a, \quad U_b = \frac{K \sigma^2}{\ell} \underline{U}_b \quad (7)$$

nous pouvons alors transformer les expressions (52,11) et (52,12) pour \underline{U} , \underline{U}_a et \underline{U}_b en

$$\underline{U} = \underline{U}_a + \underline{U}_b,$$

$$\begin{aligned} 2 \underline{U}_a &= c_w \underline{w}^2 - 2 c_{w\chi} \underline{w} \underline{\chi} - 2 \underline{w} \sum_{i=1}^n c_{wwi} \underline{w}_i + c_\chi \underline{\chi}^2 \\ &\quad + 2 \underline{\chi} \sum_{i=1}^n c_{\chi wi} \underline{w}_i + \sum_{i=1}^n c_{wi} \underline{w}_i^2 + c_y \sum_{i=1}^n \underline{e}_i^2, \end{aligned} \quad (8a)$$

$$2 \underline{U}_b = c_\varphi \underline{\varphi}^2 - 2 c_{\varphi\psi} \underline{\varphi} \underline{\psi} - 2 \underline{\varphi} \sum_{i=1}^n c_{\varphi\varphi i} \underline{\varphi}_i + \sum_{i=1}^n c_{\varphi i} \underline{\varphi}_i^2 + c_y \sum_{i=1}^n \underline{d}_i^2, \quad (8b)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} c_w &= 1, \quad c_{w\chi} = \ell_c \sqrt{\frac{c}{c \ell_{ca}^2 - G_o h}}, \quad c_{wwi} = \frac{c_i b}{r} \sqrt{\frac{\ell}{K c}}, \\ c_\chi &= 1, \quad c_{\chi wi} = \frac{c_i a_i b}{r} \sqrt{\frac{\ell}{K (c \ell_{ca}^2 - G_o h)}}, \quad c_{wi} = \frac{c_i b^2 \ell}{K r^2}, \quad c_y = \frac{c_r \ell}{K}, \end{aligned} \right\} \quad (9a)$$

$$\left. \begin{aligned} c_\varphi &= 1, \quad c_{\varphi\psi} = \frac{G_o a_o}{\sqrt{K(c\ell_{cb}^2 - G_o h)}\ell}, \quad c_{\varphi\varphi i} = \frac{c_i b_i^2}{r} \sqrt{\frac{\ell}{K(c\ell_{cb}^2 - G_o h)}}, \\ c_{\varphi i} &= \frac{c_i b_i^2 \ell}{K r^2}, \quad c_y = \frac{c_r \ell}{K}. \end{aligned} \right\} \quad (9b)$$

On peut noter que les facteurs de couplage statique sont égaux à

$$\frac{c_{w\chi}}{\sqrt{c_w c_\chi}} = \ell_c \sqrt{\frac{c}{c\ell_{ca}^2 - G_o h}}, \quad \frac{c_{wwi}}{\sqrt{c_w c_{wi}}} = \sqrt{\frac{c_i}{c}}, \quad \frac{c_{\chi wi}}{\sqrt{c_\chi c_{wi}}} = a_i \sqrt{\frac{c_i}{c\ell_{ca}^2 - G_o h}}, \quad (10a)$$

$$\frac{c_{\varphi\varphi i}}{\sqrt{c_\varphi c_{\varphi i}}} = b_i \sqrt{\frac{c_i}{c\ell_{cb}^2 - G_o h}}. \quad (10b)$$

De façon analogue avec (7) nous posons

$$T = \frac{K\sigma^2}{\ell} \underline{T}, \quad T_a = \frac{K\sigma^2}{\ell} \underline{T}_a, \quad T_b = \frac{K\sigma^2}{\ell} \underline{T}_b, \quad (11)$$

et nous pouvons réduire les expressions (51,17) et (51,11b) pour les énergies cinétiques à

$$2\underline{T}_a = m_s^* \dot{\underline{s}}^2 + m_w \dot{\underline{w}}^2 - 2m_{w\chi} \dot{\underline{w}} \dot{\underline{\chi}} + m_\chi \dot{\underline{\chi}}^2 + \sum_{i=1}^n m_{wi} \dot{\underline{w}}_i^2 + \sum_{i=1}^n m_{\chi i} \dot{\underline{\chi}}_i^2, \quad (12a)$$

$$2\underline{T}_b = m_v \dot{\underline{v}}^2 + 2m_{v\varphi} \dot{\underline{v}} \dot{\underline{\varphi}} + m_\varphi \dot{\underline{\varphi}}^2 - 2m_{\varphi\psi} \dot{\underline{\varphi}} \dot{\underline{\psi}} + m_\psi \dot{\underline{\psi}}^2 + \sum_{i=1}^n m_{\varphi i} \dot{\underline{\varphi}}_i^2, \quad (12b)$$

avec

$$\left. \begin{aligned} m_s^* &= \frac{\ell^2}{\sigma^2} (1 + Ig/Gr^2), \quad m_w = \left(\frac{W}{\ell\omega_w} \right)^2, \quad m_{w\chi} = \frac{W^2}{\ell\ell_c \omega_w \omega_\chi} a_o \sqrt{\frac{G_o}{I_y^* g}}, \\ m_\chi &= \left(\frac{W}{\ell\omega_\chi} \right)^2, \quad m_{wi} = \frac{G_i}{G} \frac{b_i^2}{r^2}, \quad m_{\chi i} = \frac{I_{yi} g}{Gr^2}, \end{aligned} \right\} \quad (13a)$$

$$\left. \begin{aligned}
 m_v = 1, \quad m_{v\varphi} &= \frac{W}{l\omega_\varphi} \frac{G_o h}{\sqrt{G I_x g}}, \quad m_\varphi = \left(\frac{W}{l\omega_\varphi} \right)^2, \\
 m_{\varphi\psi} &= \frac{W}{l\omega_\varphi} \frac{I_{xz}}{l} \sqrt{\frac{g}{G I_x}}, \quad m_\psi = \frac{I_z g}{G}, \quad m_{\varphi i} = \frac{I_i g}{Gr^2}.
 \end{aligned} \right\} \quad (13b)$$

Les facteurs de couplage dynamique s'écrivent par conséquent

$$\frac{m_w \chi}{\sqrt{m_w m_\chi}} = \frac{l}{l_c} a_o \sqrt{\frac{G_o}{I_y^* g}}, \quad (14a)$$

$$\frac{m_{v\varphi}}{\sqrt{m_v m_\varphi}} = \frac{G_o h}{\sqrt{G I_x g}}, \quad \frac{m_{\varphi\psi}}{\sqrt{m_\varphi m_\psi}} = \frac{I_{xz}}{\sqrt{I_x I_z}}. \quad (14b)$$

Il faut remarquer que dans les formules (12a) et (12b) les fluxions \dot{q}_k se rapportent au temps t sans dimension, comme il se fera partout dans la partie ultérieure de la publication présente. Avec (6a), (4) et (13a) la relation (51,14) se transforme à

$$\underline{u} = - \frac{\sigma}{l} \frac{G_o h \chi \sqrt{\frac{G_o m_\chi}{I_y^* g}} + \sum_{i=1}^n m_{\chi i} \chi_i}{1 + I_g / Gr^2}. \quad (15)$$

Posons maintenant

$$\left. \begin{aligned}
 \underline{\gamma}_i &= \sigma \underline{\gamma}_i, \quad \underline{\zeta}_i = \frac{\sigma b}{r} \underline{\zeta}_i, \quad \underline{\varepsilon}_i = \frac{\sigma}{r} \underline{\varepsilon}_i, \\
 \underline{\gamma}_{ij} &= \sigma \underline{\gamma}_{ij}, \quad \underline{\gamma}_{ij}^* = \sigma \underline{\gamma}_{ij}^*, \quad \underline{\zeta}_{ij} = \frac{\sigma b}{r} \underline{\zeta}_{ij}, \quad \underline{\zeta}_{ij}^* = \frac{\sigma b}{r} \underline{\zeta}_{ij}^*, \\
 \underline{\zeta}_{ij}^* &= \frac{\sigma r}{l} \underline{\zeta}_{ij}^*, \quad \underline{y}_{ij} = \sigma \underline{y}_{ij}, \quad \underline{z}_{ij} = \frac{\sigma b}{r} \underline{z}_{ij}, \\
 \underline{\chi}_{ij} &= \frac{\sigma b}{lr} \underline{\chi}_{ij}, \quad \underline{\psi}_{ij} = \frac{\sigma}{l} \underline{\psi}_{ij},
 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned}
 Y_{ij} &= \frac{1}{2} G \rho_i \underline{Y}_{ij}, \quad Q_{ij} = \frac{1}{2} G \rho_i \underline{Q}_{ij}, \quad N_{ij} = \frac{1}{2} G \rho_i \underline{N}_{ij}, \\
 T_{xij} &= \frac{G \kappa_{oi} \sigma}{\ell} \underline{T}_{xij}, \quad T_{yij} = \frac{G \kappa_{oi} \sigma}{\ell} \underline{T}_{yij}, \\
 L_{1,2} &= \frac{K \sigma^2}{\ell^2} \underline{L}_{1,2}, \quad M_i = \frac{K \sigma^2 r}{\ell^2} \underline{M}_i, \quad \frac{\sigma b}{r^2} \kappa_{oi} = \underline{\kappa}_{oi}, \\
 a_i &= \ell a_i, \quad b = \ell b,
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

et

$$k_w = \frac{k W}{c \ell}, \quad k_{w\chi} = \frac{k \ell_k W}{\ell \sqrt{c(c \ell_{ca}^2 - G_o h)}}, \quad k_{wwi} = \frac{k_i b W}{r \sqrt{K c \ell}}, \quad (18a)$$

$$k_\chi = \frac{k \ell_{ka}^2 W}{(c \ell_{ca}^2 - G_o h) \ell}, \quad k_{\chi wi} = \frac{k_i a_i b W}{r \sqrt{K(c \ell_{ca}^2 - G_o h) \ell}}, \quad k_{wi} = \frac{k_i b_2 W}{K r^2}, \quad (18b)$$

$$k_\varphi = \frac{k \ell_{kb}^2 W}{(c \ell_{cb}^2 - G_o h) \ell}, \quad k_{\varphi \varphi i} = \frac{k_i b_i^2 W}{r \sqrt{K(c \ell_{cb}^2 - G_o h) \ell}}, \quad (18b)$$

$$k_{\varphi i} = \frac{k b_i^2 W}{K r^2}.$$

Les forces généralisées sans dimension se calculent à l'aide de la relation

$$Q_k = \frac{K \sigma^2}{\ell} \frac{q_k}{q_k} \underline{Q}_k; \quad (k=1, \dots, m) \quad (19)$$

elles s'écrivent

$$\underline{Q}_s^* = \frac{G \ell}{K \sigma} \left\{ \sum_{i=1}^n \kappa_{oi} (\underline{T}_{xi1} \zeta_{i1}^* + \underline{T}_{xi2} \zeta_{i2}^*) + \frac{1}{2} \psi \sum_{i=1}^n \rho_i (\underline{Y}_{i1} + \underline{Y}_{i2}) \right\}$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i (\underline{Q}_{i1} \dot{\xi}_{i1}^* + \underline{Q}_{i2} \dot{\xi}_{i2}^*) \Big\} + \underline{L}_1 + \underline{L}_2 + \sum_{i=1}^n \underline{M}_i ,$$

$$\underline{Q}_w = - k_w \dot{\underline{w}} + k_{w\chi} \dot{\underline{\chi}} + \sum_{i=1}^n k_{wwi} \dot{\underline{w}}_i ,$$

$$\underline{Q}_\chi = k_{w\chi} \dot{\underline{w}} - k_{\chi\chi} \dot{\underline{\chi}} - \sum_{i=1}^n k_{\chi wi} \dot{\underline{w}}_i ,$$

$$\underline{Q}_{wi} = k_{wwi} \dot{\underline{w}} - k_{\chi wi} \dot{\underline{\chi}} - k_{wi} \dot{\underline{w}}_i + \frac{G\ell b}{K\sigma r} \rho_i \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\underline{Q}_{i1} + \underline{Q}_{i2}) \right\} ,$$

$$\underline{Q}_{\chi i} = - \frac{G\ell b}{K} \kappa_{oi} (\underline{T}_{xi1} + \underline{T}_{xi2}) - \frac{\sigma}{\ell} \underline{M}_i , \quad \underline{Q}_{ei} = \frac{G\ell \cdot 1}{K\sigma \cdot 2} \rho_i (\underline{Y}_{i1} - \underline{Y}_{i2} - 2tg \gamma_0) ,$$

$$\underline{Q}_v = - \frac{G\ell \cdot 1}{K\sigma \cdot 2} \sum_{i=1}^n \rho_i (\underline{Y}_{i1} + \underline{Y}_{i2}) ,$$

$$\underline{Q}_\varphi = - k_\varphi \dot{\underline{\varphi}} + \sum_{i=1}^n k_{\varphi\varphi i} \dot{\underline{\varphi}}_i ,$$

$$\underline{Q}_\psi = \frac{GB}{K} \sum_{i=1}^n \kappa_{oi} (\underline{T}_{xi1} - \underline{T}_{xi2}) - \frac{G\ell}{K\sigma} \sum_{i=1}^n \alpha_i \rho_i (\underline{Y}_{i1} + \underline{Y}_{i2}) , \quad (20b)$$

$$\underline{Q}_{\varphi i} = k_{\varphi\varphi i} \dot{\underline{\varphi}} - k_{\varphi i} \dot{\underline{\varphi}} + \frac{G\ell}{K\sigma} \cdot \frac{1}{2} \rho_i (\underline{Y}_{i1} + \underline{Y}_{i2}) - \frac{G\ell^2}{K\sigma r} \cdot \frac{1}{2} B(\underline{Q}_{i1} - \underline{Q}_{i2}) ,$$

$$\underline{Q}_{di} = \frac{G\ell}{K\sigma} \cdot \frac{1}{2} \rho_i (\underline{Y}_{i1} + \underline{Y}_{i2}) .$$

En quantités sans dimensions les équations de Lagrange (23,2) s'écrivent

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \underline{L}}{\partial \dot{\underline{q}}_k} - \frac{\partial \underline{L}}{\partial \underline{q}_k} = \underline{Q}_k . \quad (k=1, \dots, m) \quad (21)$$

A l'aide de (8a), (8b), (12a) et (12b) on trouve

$$m_s^* \ddot{u}_s^* = \underline{Q}_s^*,$$

$$m_w \ddot{w} - m_{w\chi} \ddot{\chi} + k_w \dot{w} - k_{w\chi} \dot{\chi} - \sum_{i=1}^n k_{wwi} \dot{w}_i + c_w \dot{w} - c_{w\chi} \dot{\chi} - \sum_{i=1}^n c_{wwi} \dot{w}_i = 0,$$

$$- m_{w\chi} \ddot{w} + m_{\chi} \ddot{\chi} - k_{w\chi} \dot{w} + k_{\chi} \dot{\chi} + \sum_{i=1}^n k_{\chi wi} \dot{w}_i - c_{w\chi} \dot{w} + c_{\chi} \dot{\chi} + \sum_{i=1}^n c_{\chi wi} \dot{w}_i = 0,$$

$$m_{wi} \ddot{w}_i - k_{wwi} \dot{w} + k_{\chi wi} \dot{\chi} + k_{wi} \dot{w}_i - c_{wwi} \dot{w} + c_{\chi wi} \dot{\chi} + c_{wi} \dot{w}_i$$

$$= \frac{G/b}{K\sigma r} \rho_i \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\underline{Q}_{i1} + \underline{Q}_{i2}) \right\},$$

$$m_{\chi i} \ddot{\chi}_i = - \frac{G \chi_{oi}}{K} (\underline{T}_{x11} + \underline{T}_{x12}) - \frac{\sigma}{\ell} \underline{E}_i, \quad c_{ye_i} = \frac{G \ell}{K\sigma} \frac{1}{2} \rho_i (\underline{Y}_{i1} - \underline{Y}_{i2} - 2t g \gamma_0),$$

$$m_v \ddot{v} + m_{v\varphi} \ddot{\varphi} = - \frac{G \ell}{K\sigma} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i (\underline{Y}_{i1} + \underline{Y}_{i2}),$$

$$m_{v\varphi} \ddot{v} + m_{\varphi} \ddot{\varphi} - m_{\varphi\psi} \ddot{\psi} + k_{\varphi} \dot{\varphi} - \sum_{i=1}^n k_{\varphi\varphi i} \dot{\varphi}_i + c_{\varphi} \dot{\varphi} - c_{\varphi\psi} \dot{\psi} - \sum_{i=1}^n c_{\varphi\varphi i} \dot{\varphi}_i = 0,$$

$$- m_{\varphi\psi} \ddot{\varphi} + m_{\psi} \ddot{\psi} - c_{\varphi\psi} \dot{\varphi} = \frac{G B}{K} \sum_{i=1}^n \chi_{oi} (\underline{T}_{x11} - \underline{T}_{x12}) - \frac{G \ell}{K\sigma} \sum_{i=1}^n \rho_i (\underline{Y}_{i1} + \underline{Y}_{i2}),$$

$$m_{\varphi i} \ddot{\varphi}_i - k_{\varphi\varphi i} \dot{\varphi} + k_{\varphi i} \dot{\varphi}_i - c_{\varphi\varphi i} \dot{\varphi} + c_{\varphi i} \dot{\varphi}_i$$

$$= \frac{G \ell}{K\sigma} \cdot \frac{1}{2} \rho_i (\underline{Y}_{i1} + \underline{Y}_{i2}) - \frac{G \ell^2}{K\sigma r} \cdot \frac{1}{2} \rho_i (\underline{Q}_{i1} - \underline{Q}_{i2}),$$

$$c_{yd_i} = \frac{G \ell}{K\sigma} \cdot \frac{1}{2} \rho_i (\underline{Y}_{i1} + \underline{Y}_{i2}),$$

\underline{Q}_s^* étant déterminé par (20a).

Considérons ensuite les relations (51,2a) entre les forces N_{ij} , T_{yij} et les forces Y_{ij} , Q_{ij} . Elles s'écrivent en quantités sans dimension

$$\left. \begin{aligned} N_{ij} &= \pm Y_{ij} \sin \gamma_{ij} + Q_{ij} \cos \gamma_{ij}, \\ \frac{2\lambda_{oi}\sigma}{\rho_i l} T_{yij} &= Y_{ij} \cos \gamma_{ij} \mp Q_{ij} \sin \gamma_{ij}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Les formules (46,13) et (46,14) pour les glissements réduits et la vitesse angulaire normale (où il faut remplacer \dot{s} par \dot{s}^*) se transforment en

$$\left. \begin{aligned} v_{xij} &= -\frac{b\ell}{r^2} \xi_{ij}^* + \frac{\mp B\dot{\psi} + \dot{\chi}_i}{\dot{s}^*}, \\ v_{yij} &= \frac{\psi}{\cos \gamma_{ij}} + \frac{(1 - \frac{\partial \varphi_i}{\partial v_i})(\dot{v}_i - \dot{d}_i) - (\pm 1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial e_i}) \dot{e}_i}{\dot{s}^* \cos \gamma_{ij}}, \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

$$\frac{r\omega_{nij}}{\dot{s}^*} = \pm \sin \gamma_{ij}, \quad (25)$$

avec

$$v_{xij} = \frac{\sigma}{\ell} v_{xij}, \quad v_{yij} = \frac{\sigma}{\ell} v_{yij}, \quad v_{ij} = \frac{\sigma}{\ell} v_{ij}. \quad (26)$$

Pour les relations entre les forces tangentiellles, les forces normales et les glissements réduits on trouve selon (46,19)

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xij} &= \frac{T_{xij}}{N_{ij}} = \frac{\kappa_{ij}}{2\lambda_{oi}} \frac{\rho_i v_{xij}}{1 + \frac{\kappa_{ij}^2 \sigma^2}{\mu^2 \ell^2} v_{ij}^2}, \\ \tau_{yij} &= \frac{T_{yij}}{N_{ij}} = \frac{\kappa_{ij}}{2\lambda_{oi}} \frac{\rho_i v_{yij}}{1 + \frac{\kappa_{ij}^2 \sigma^2}{\mu^2 \ell^2} v_{ij}^2}, \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

où

$$\tau_{xij} = \frac{2\lambda_{oi}\sigma}{\rho_i l} \tau_{xij}, \quad \tau_{yij} = \frac{2\lambda_{oi}\sigma}{\rho_i l} \tau_{yij}. \quad (28)$$

Enfin les relations entre les coordonnées v_i , d_i , e_i , les coordonnées w_i , φ_i et les quantités ξ_{ij} etc. s'écrivent selon (331,20)

$$\left. \begin{aligned} v_{ij} &= \pm (\underline{v}_i - \underline{d}_i - \underline{\gamma}_i - \underline{\varphi}_i) - \underline{e}_i, \\ z_{ij} &= -\underline{w}_i + (\underline{\varphi}_i - \underline{\beta}_i) + \underline{\xi}_i, \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

avec

$$v_{ij} = \gamma_{ij}^* - \gamma_{ij}, \quad z_{ij} = \xi_{ij}^* - \xi_{ij} \quad (30)$$

selon (331,18),

$$\operatorname{tg} \gamma_{ij} = \frac{b}{r} \left(\frac{d z_{ij}}{dy} \right)_{y = y_{ij}} \quad (31)$$

et

$$\xi_{ij}^* = \pm (\psi_i - \psi_{ij}) \operatorname{tg} \gamma_{ij} + \frac{b}{r} \chi_{ij} \quad (32)$$

selon (331,13b). Dans les relations (24) et (29), selon (6b) et (17) le déplacement v_i est égal à

$$v_i = v + a_i \psi. \quad (i=1, \dots, n) \quad (33)$$

54. Cas linéaire. On vérifie sans peine que pour $Q_s^* = 0$ et

$\gamma_i = \xi_i = \beta_i = 0$, la solution

$$\left. \begin{aligned} w &= \chi = w_1 = \chi_1 = e_1 = 0, & v &= \varphi = \psi = \varphi_1 = d_1 = 0, \\ Q_{i1} &= Q_{i2} = 1, & Y_{i1} &= -Y_{i2} = \operatorname{tg} \gamma_0, \\ T_{x11} &= T_{x12} = T_{y11} = T_{y12} = 0, & \xi_{ij}^* &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

satisfait aux équations de mouvement (53,22a) et (53,22b) aux relations (53,23), (53,27) et (53,29) y appartenant.

On peut se demander si la solution (1) est une solution stable.

Dans la recherche de la stabilité de la solution nous nous restreindrons au cas où la rigidité de la voie est infinie, de sorte que

$$c_r = \infty, c_y = \infty, d_1 = 0, e_1 = 0. \quad (2)$$

Ensuite nous admettrons que le véhicule est symétrique par rapport au plan $(y, 0, z)$, de sorte que

$$c_{w\chi} = c_{\varphi\psi} = 0, \quad m_{w\chi} = m_{\varphi\psi} = 0, \quad k_{w\chi} = 0, \quad (3)$$

et que la vitesse \dot{s} est constante, de sorte que nous pouvons la remplacer par

$$\underline{v} = V/W = \underline{\dot{s}}, \quad (4)$$

en correspondance avec (52,9).

Les équations de mouvement qu'il faut étudier, s'écrivent alors avec (53,9a), (53,9b) et (53,13b)

$$\begin{aligned} m_{\underline{w}} \ddot{\underline{w}} + k_{\underline{w}} \dot{\underline{w}} - \sum_{i=1}^n k_{wwi} \dot{\underline{w}}_i + \underline{w} - \sum_{i=1}^n c_{wwi} \underline{w}_i &= 0, \\ m_{\underline{\chi}} \ddot{\underline{\chi}} + k_{\underline{\chi}} \dot{\underline{\chi}} + \sum_{i=1}^n k_{\chi wi} \dot{\underline{w}}_i + \underline{\chi} + \sum_{i=1}^n c_{\chi wi} \underline{w}_i &= 0, \\ m_{wi} \ddot{\underline{w}}_i - k_{wwi} \dot{\underline{w}} + k_{\chi wi} \dot{\underline{\chi}} + k_{wi} \dot{\underline{w}}_i - c_{wwi} \underline{w} + c_{\chi wi} \underline{\chi} + c_{wi} \underline{w}_i &= \\ &= \frac{G\ell b}{K\sigma r} \rho_i \left\{ 1 - \frac{1}{2} (\underline{Q}_{i1} + \underline{Q}_{i2}) \right\}, \end{aligned} \quad (5a)$$

$$m_{\chi i} \ddot{\underline{\chi}}_i = - \frac{G\ell b_i}{K} (\underline{T}_{x11} + \underline{T}_{x12}) - \frac{\sigma}{\ell} \underline{M}_1, \quad (i=1, \dots, n)$$

$$\begin{aligned} \underline{\ddot{v}} + m_{v\varphi} \ddot{\underline{\varphi}} &= - \frac{G\ell}{K\sigma} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \rho_i (\underline{Y}_{i1} + \underline{Y}_{i2}), \\ m_{v\varphi} \ddot{\underline{v}} + m_{\varphi} \ddot{\underline{\varphi}} + k_{\varphi} \dot{\underline{\varphi}} - \sum_{i=1}^n k_{\varphi\varphi i} \dot{\underline{\varphi}}_i + \underline{\varphi} - \sum_{i=1}^n c_{\varphi\varphi i} \underline{\varphi}_i &= 0, \\ m_{\psi} \ddot{\underline{\psi}} &= \frac{G\ell}{K} \sum_{i=1}^n \lambda_{oi} (\underline{T}_{x11} - \underline{T}_{x12}) - \frac{G\ell}{K\sigma} \sum_{i=1}^n a_i \rho_i (\underline{Y}_{i1} + \underline{Y}_{i2}), \\ m_{\varphi i} \ddot{\underline{\varphi}}_i - k_{\varphi\varphi i} \dot{\underline{\varphi}} + k_{\varphi i} \dot{\underline{\varphi}}_i - c_{\varphi\varphi i} \underline{\varphi} + c_{\varphi i} \underline{\varphi}_i &= \\ &= \frac{G\ell}{K\sigma} \frac{1}{2} \rho_i (\underline{Y}_{i1} + \underline{Y}_{i2}) - \frac{G\ell^2}{K\sigma r} \frac{1}{2} \beta (\underline{Q}_{i1} - \underline{Q}_{i2}). \end{aligned} \quad (5b)$$

Les relations y appartenant sont les relations (53,23), (53,29), (53,30) et les relations entre les forces tangentiellles et les glissements réduits, pour lesquelles nous admettrons les relations (53,27) d'être valables. Dans la linéarisation du problème on peut réduire les dernières relations par

$$\underline{T}_{xij} = \frac{1}{2} \rho_i \underline{N}_{oi} \underline{v}_{xij}, \quad \underline{T}_{yij} = \frac{1}{2} \rho_i \underline{N}_{oi} \underline{v}_{yij}, \quad (6)$$

les glissements réduits étant donnés par

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}_{xij} &= -\frac{b\ell}{r^2} \underline{\gamma}_{ij}^* + \underline{v}^{-1} \left(\frac{1}{r} \underline{b} \dot{\underline{\psi}} + \dot{\underline{\chi}}_i \right), \\ \underline{v}_{yij} &= \frac{\underline{\psi}}{\cos \gamma_{ij}} + \underline{v}^{-1} \frac{\dot{\underline{v}} + a_1 \dot{\underline{\psi}}}{\cos \gamma_{ij}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

selon (53,24), (53,33) et (4).

Les relations (53,29) et (53,30) s'écrivent dans le cas présent

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}_{ij} &= \underline{\gamma}_{ij}^* - \underline{\gamma}_{ij} = \pm (\underline{v}_i - \underline{\psi}_i), \\ \underline{z}_{ij} &= \underline{\xi}_{ij}^* - \underline{\xi}_{ij} = -\frac{\underline{w}_i}{r} \mp \underline{\psi}_i. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Lorsque les valeurs γ_{ij} , γ_{ij}^* , ξ_{ij} , ξ_{ij}^* sont très faibles, on peut écrire

$$\underline{\xi}_{ij} = \underline{\gamma}_{ij} \operatorname{tg} \gamma_0 + \frac{\underline{\gamma}_{ij}^2}{2 \rho_0 \cos^3 \gamma_0}, \quad \underline{\xi}_{ij}^* = \underline{\gamma}_{ij}^* \operatorname{tg} \gamma_0 + \frac{\underline{\gamma}_{ij}^{*2}}{2 \rho_0 \cos^3 \gamma_0}, \quad (9)$$

γ_0 étant l'angle d'inclinaison dans la position centrale du véhicule, et ρ_0 et ρ_0^* les valeurs des rayons de combure ρ_{yij} , ρ_{yij}^* pour cette position. En voici les relations en quantités sans dimension:

$$\frac{b}{r} \underline{\xi}_{ij} = \underline{\gamma}_{ij} \operatorname{tg} \gamma_0 + \frac{\sigma \underline{\gamma}_{ij}^2}{2 \rho_0 \cos^3 \gamma_0}, \quad \frac{b}{r} \underline{\xi}_{ij}^* = \underline{\gamma}_{ij}^* \operatorname{tg} \gamma_0 + \frac{\sigma \underline{\gamma}_{ij}^{*2}}{2 \rho_0^* \cos^3 \gamma_0}. \quad (10)$$

De (8) et (10) on déduit les relations linéaires

$$\left. \begin{aligned} \underline{w}_i &= 0, & \underline{\varphi}_i &= \frac{\operatorname{tg} \gamma_0}{\operatorname{tg} \gamma_0 - b/r} \underline{v}_i, \\ \underline{\gamma}_{ij}^* &= \pm \frac{\rho_0^*}{\rho_0^* - \rho_0} \frac{\underline{v}_i}{1 - \frac{r}{b} \operatorname{tg} \gamma_0}, & \frac{b}{r} \underline{\zeta}_{ij}^* &= \pm \frac{\rho_0^*}{\rho_0^* - \rho_0} \frac{\operatorname{tg} \gamma_0}{1 - \frac{r}{b} \operatorname{tg} \gamma_0} \underline{v}_i, \end{aligned} \right\} (11)$$

tandis que

$$\Delta \gamma_{ij} = \gamma_{ij} - \gamma_0 \quad (12)$$

est égal à

$$\Delta \gamma_{ij} = \pm \frac{\sigma}{\rho_0^* - \rho_0} \frac{\underline{v}_i}{\cos \gamma_0 - \frac{r}{b} \sin \gamma_0}. \quad (13)$$

Avec (11) et (12) on peut réduire les relations (7) à

$$\left. \begin{aligned} \underline{v}_{xij} &= \mp \frac{\ell}{r} \frac{\rho_0^*}{\rho_0^* - \rho_0} \frac{\operatorname{tg} \gamma_0}{1 - \frac{r}{b} \operatorname{tg} \gamma_0} (\underline{v} + a_i \underline{\psi}) + \underline{v}^{-1} (\mp \underline{\psi} + \dot{\underline{\chi}}_i), \\ \underline{v}_{yij} &= \frac{\underline{\psi}}{\cos \gamma_0} + \underline{v}^{-1} \frac{\underline{\dot{v}} + a_i \dot{\underline{\psi}}}{\cos \gamma_0}. \end{aligned} \right\} (14)$$

Procédons maintenant à la linéarisation des relations (53,23), et posons

$$\left. \begin{aligned} \underline{N}_{ij} &= \underline{N}_{oi} + \Delta \underline{N}_{ij}, & \underline{T}_{yij} &= \Delta \underline{T}_{yij}, \\ \underline{Q}_{ij} &= \underline{Q}_{ij} + \Delta \underline{Q}_{ij}, & \underline{Y}_{ij} &= \underline{Y}_{oij} + \Delta \underline{Y}_{ij}. \end{aligned} \right\} (15)$$

En substituant ces quantités dans les relations (53,23) on trouve avec (12)

$$\left. \begin{aligned} \underline{N}_{oi} &= \pm \underline{Y}_{oij} \sin \gamma_0 + \underline{Q}_{oi} \cos \gamma_0, \\ 0 &= \underline{Y}_{oij} \cos \gamma_0 \mp \underline{Q}_{oi} \sin \gamma_0, \\ \frac{2\chi_{oi}\sigma}{\rho_1 \ell} \Delta \underline{T}_{yij} &= -(\underline{Y}_{oij} \sin \gamma_0 \pm \underline{Q}_{oi} \cos \gamma_0) \Delta \gamma_{ij} \\ &\quad + \Delta \underline{Y}_{ij} \cos \gamma_0 \mp \Delta \underline{Q}_{ij} \sin \gamma_0, \end{aligned} \right\} (16)$$

et en outre une relation avec ΔN_{ij} que nous pourrions laisser outre considération. En combinaison avec les équations (5a) pour w_i (dans lesquelles on peut poser $w_i = 0$ à cause de (11)), et avec les équations (5b) pour φ_i on peut calculer maintenant Q_{ij} et Y_{ij} ; voici le résultat:

$$Y_{oi} = 1, \quad Y_{oij} = \pm \operatorname{tg} \gamma_0, \quad N_{oi} = \frac{1}{\cos \gamma_0}, \quad (17)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{G\ell}{K\sigma} (Y_{i1} + Y_{i2}) = & \frac{1}{1 - \frac{\rho_i r}{\beta \ell} \operatorname{tg} \gamma_0} \left[\frac{G\chi_{oi}}{K \cos \gamma_0} \frac{2}{\rho_i} (T_{yi1} + T_{yi2}) \right. \\ & + \frac{G\ell}{K(\rho_o^* - \rho_o)} \frac{2v_i}{\cos \gamma_0 (\cos \gamma_0 - \frac{r}{b} \sin \gamma_0)} - \frac{2r}{\beta \ell} \operatorname{tg} \gamma_0 (m_{\varphi i} \ddot{\varphi}_i \\ & \left. - k_{\varphi \varphi i} \dot{\varphi} + k_{\varphi i} \dot{\varphi}_i - c_{\varphi \varphi i} \dot{\varphi} + c_{\varphi i} \dot{\varphi}_i) \right], \quad (18a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{G\ell}{K\sigma} (Q_{i1} - Q_{i2}) = & \frac{1}{1 - \frac{\rho_i r}{\beta \ell} \operatorname{tg} \gamma_0} \left[\frac{2r}{\beta \ell} \frac{G\chi_{oi}}{K \cos \gamma_0} (T_{yi1} + T_{yi2}) \right. \\ & + \frac{G\ell}{K(\rho_o^* - \rho_o)} \frac{\rho_i r}{\beta \ell} \frac{2v_i}{\cos \gamma_0 (\cos \gamma_0 - \frac{r}{b} \sin \gamma_0)} - \frac{2r}{\beta \ell} (m_{\varphi i} \ddot{\varphi}_i \\ & \left. - k_{\varphi \varphi i} \dot{\varphi} + k_{\varphi i} \dot{\varphi}_i - c_{\varphi \varphi i} \dot{\varphi} + c_{\varphi i} \dot{\varphi}_i) \right] \quad (18b) \end{aligned}$$

Dans ces formules on peut encore remplacer φ_i par v_i à l'aide de (11).

Avec (6) et (14) nous pouvons maintenant éliminer les forces des équations de mouvement (5a) et (5b). En exécutant l'élimination on voit sans peine que les équations (5a) ne contiennent encore que les déplacements w , χ et χ_1 , tandis que les équations (5b) ne contiennent que les déplacements v , φ et φ_1 . Dans le cas linéaire le mouvement symétrique est par conséquent indépendant

du mouvement latéral.

Cependant, dans l'élimination nous nous restreindrons au cas que $\gamma_0 \ll 1$. Dans ce cas on peut écrire selon (6), (17) et (14):

$$\begin{aligned} \underline{T}_{x11} + \underline{T}_{x12} &= \rho_1 \underline{v}^{-1} \dot{\underline{\chi}}_1, \\ \underline{T}_{x11} - \underline{T}_{x12} &= -\rho_1 \left\{ \frac{\ell}{r} \frac{\gamma_0 \rho_0^*}{\rho_0^* - \rho_0} (\underline{v} + a_1 \underline{\psi}) + B \underline{v}^{-1} \dot{\underline{\psi}} \right\}, \\ \underline{T}_{y11} + \underline{T}_{y12} &= \rho_1 \left\{ \underline{\psi} + \underline{v}^{-1} (\dot{\underline{v}} + a_1 \dot{\underline{\psi}}) \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

et selon (18a) et (53,33)

$$\frac{G \ell}{K \sigma} (\underline{Y}_{11} + \underline{Y}_{12}) = \frac{2G \kappa_{01}}{K} \left\{ \underline{\psi} + \underline{v}^{-1} (\dot{\underline{v}} + a_1 \underline{\psi}) \right\} + 2C (\underline{v} + a_1 \underline{\psi}) \quad (20)$$

avec

$$C = \frac{G \ell}{K(\rho_0^* - \rho_0)}. \quad (21)$$

On voit que nous avons partout remplacé $\text{tg} \gamma_0$ et $\sin \gamma_0$ par γ_0 , $\cos \gamma_0$ par 1 et que nous avons négligé

$$\frac{r \text{tg} \gamma_0}{B \ell} = \frac{\gamma_0 r}{b}$$

par rapport à 1, tandis que nous avons considéré chaque produit γ_0 avec un déplacement comme négligeable. Cependant nous avons fait une exception dans la formule (19) pour $\underline{T}_{x11} - \underline{T}_{x12}$: étant donné que le plus souvent

$$r \ll \ell, \rho_0^* - \rho_0 \ll \rho_0^*, \quad (22)$$

on trouve que le facteur sans dimension

$$\frac{\ell}{r} \frac{\gamma_0 \rho_0^*}{\rho_0^* - \rho_0}$$

est d'ordre de grandeur de l'unité.

Avec (19) - (21) et $w_1 = 0$ selon (11) et en tenant compte du symétrie du véhicule on peut réduire les équations de mouvement (5a) et (5b) en

$$\left. \begin{aligned} m_w \ddot{w} + k_w \dot{w} + w &= 0, \\ m_\chi \ddot{\chi} + k_\chi \dot{\chi} + \chi &= 0, \\ m_{\chi i} \ddot{\chi}_i + \frac{G \kappa_{oi} \rho_i}{K} V^{-1} \dot{\chi}_i &= -\frac{\sigma}{l} M_1, \end{aligned} \right\} \quad (23a)$$

$$\left. \begin{aligned} \ddot{v} + m_{v\varphi} \ddot{\varphi} + V^{-1} \dot{v} + C v - \psi &= 0, \\ m_{v\varphi} \dot{v} + m_\varphi \ddot{\varphi} + k_\varphi \dot{\varphi} + \varphi &= 0, \\ m_\psi \ddot{\psi} + \Gamma V^{-1} \dot{\psi} + \Gamma v + \Gamma A C \psi &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (23b)$$

en posant

$$\Gamma = \frac{\gamma_c b}{r} \frac{\rho_o^*}{\rho_o^* - \rho_o}, \quad A = \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2 \rho_i}{\Gamma}, \quad (24)$$

et en choisissant la longueur de comparaison ℓ de telle sorte que

$$\ell^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (a_i^2 + b^2) \kappa_{oi} \rho_i}{\Gamma \sum_{i=1}^n \kappa_{oi} \rho_i}. \quad (25)$$

On voit sans peine que dans le cas où les coefficients κ_{oi} ne dépendent pas de i , il existe la relation

$$A = 1 - \beta^2 / \Gamma \quad (26)$$

entre A , Γ et β .

On voit immédiatement que le mouvement symétrique, gouverné par les équations (23a), est toujours stable. Mais le mouvement latéral est tantôt stable, tantôt instable, et la stabilité dépend des valeurs des sept paramètres indépendants V , m_φ , $m_{v\varphi}$, k_φ , C , A et m_ψ / Γ se présentant dans les équations (23b).

6. Observations finales. La théorie développée peut servir de base à des calculs plus spéciaux. L'auteur se propose de publier les résultats de tels calculs en temps utile.

Il est désirable d'étudier encore plus complètement les propriétés du frottement de deux corps en contact, et spécialement de rechercher comment les forces de contact dépendent des vitesses de glissement pour une valeur quelconque de γ_{ij} .

Il va de soi, lorsqu'il aura été possible de trouver des solutions (par exemple avec des méthodes numériques ou d'analogie) qu'il faudra aussi étudier des véhicules plus compliqués (à bogies, à essieux convergents, etc.)

L'auteur témoigne ses remerciements à M. M. Giddey, ancien ingénieur de liaison de l'Office de Recherches et d'Essais (O.R.E.) de l'Union Internationale des Chemins de fer, pour l'assistance considérable qu'il a donné dans le domaine des problèmes linguistiques en connexion avec l'étude présent. Il veut en outre remercier bien sincèrement M. W.G. Koster, collaborateur scientifique du Laboratoire de Mécanique Technique de l'Université Technologique de Delft. M. Koster a établi les calculs exposés dans le chapitre 34 et l'appendice A, tandis que les calculs reproduits dans le chapitre 4 lui sont dus pour la plus grande partie.

A. Appendice. Dans l'appendice présent nous décrirons l'établissement des équations de mouvement (45,1^a) - (45,1^c) à l'aide des lois principales de la mécanique rationnelle. Observons d'avance que dans tous les calculs dans cet appendice nous pouvons nous limiter aux termes du premier ordre.

Pour la caisse l'équation de translation s'écrit

$$\dot{\mathbf{J}} = \sum_{\ell} \mathbf{F}_{\ell}, \quad (1)$$

\mathbf{J} étant l'impulsion de la caisse et \mathbf{F}_{ℓ} une des forces s'y appliquant. En outre nous disposons de l'équation de rotation

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{\ell} \bar{\rho}_{\ell} \times \mathbf{F}_{\ell}, \quad (2)$$

$\bar{\rho}_{\ell}$ étant le vecteur du point d'application de la force \mathbf{F}_{ℓ} , et \mathbf{H} le moment d'impulsion de la caisse. Dans ces deux équations les vecteurs se rapportent au trièdre fixe (ω, ξ, η, ζ).

Nous ferons une combinaison des équations (1) et (2). Nous avons

$$\mathbf{J} = \sum_i m_i \dot{\bar{\rho}}_i, \quad \mathbf{H} = \sum_i \bar{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\rho}}_i. \quad (3)$$

Or, nous introduisons le vecteur $\bar{\rho}_0^{\times}$ de l'origine o du trièdre mouvant (o, x, y, z), ainsi que le vecteur $\bar{\rho}_0^o$ du centre de masse de la caisse. Selon (31,11) et (35,2) nous avons

$$\bar{\rho}_0^{\times} = \bar{\rho}_0 + \bar{\mathbf{p}}, \quad \bar{\rho}_0^o = \bar{\rho}_0 + \bar{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{r}}_0^{\times}. \quad (4)$$

En posant

$$\bar{\rho}_i = \bar{\rho}_0^{\times} + (\bar{\rho}_i - \bar{\rho}_0^{\times}) \quad (5)$$

en utilisant la relation déroulant de la propriété du centre de masse

$$\sum_i m_i \bar{\rho}_i = \frac{G_o}{g} \bar{\rho}_0^o \quad (6)$$

nous pouvons écrire

$$\mathbf{J} = \frac{G_o}{g} \dot{\bar{\rho}}_0^o,$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_o + \frac{G_o}{g} \bar{\rho}_0^{\times} \times (\dot{\bar{\rho}}_0^o - \dot{\bar{\rho}}_0^{\times}) + \frac{G_o}{g} (\bar{\rho}_0^o - \bar{\rho}_0^{\times}) \times \dot{\bar{\rho}}_0^{\times} + \frac{G_o}{g} \bar{\rho}_0^{\times} \times \dot{\bar{\rho}}_0^{\times}, \quad (7)$$

avec

$$\vec{H}_0 = \sum_i (\vec{p}_i - \vec{p}_0^{\times}) \times m_i (\vec{p}_i - \vec{p}_0^{\times}), \quad (8)$$

\vec{H}_0 étant le moment d'impulsion de la caisse se présentant lorsque le point o est en repos. Or, on vérifié sans peine la relation

$$\dot{\vec{H}} - \vec{p}_0^{\times} \times \dot{\vec{J}} = \dot{\vec{H}}_0 + \frac{G_0}{g} (\vec{p}_0^0 - \vec{p}_0^{\times}) \times \ddot{\vec{p}}_0^0, \quad (9)$$

et en combinaison avec (1) et (2) nous trouvons la relation

$$\dot{\vec{H}}_0 + \frac{G_0}{g} (\vec{p}_0^0 - \vec{p}_0^{\times}) \times \ddot{\vec{p}}_0^0 = \sum_l (\vec{p}_l - \vec{p}_0^{\times}) \times \vec{F}_l, \quad (10)$$

relation que nous utiliserons comme équation de rotation.

De (7), (4), (31,2), (31,5), (31,10) et (31,3) nous déduisons

$$\dot{\vec{J}} = \frac{G_0}{g} \begin{pmatrix} \ddot{\psi} - h\ddot{\chi} \\ \ddot{\varphi} + h\ddot{\psi} + a_0\ddot{\psi} \\ \ddot{\omega} - a_0\ddot{\chi} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Le moment d'impulsion \vec{H}_0 se calcule comme

$$\vec{H}_0 = \vec{A} \vec{H}_0^{\times} \quad (12)$$

avec

$$\vec{H}_0^{\times} = \begin{pmatrix} I_x \omega_x^{\times} - I_{xz} \omega_z^{\times} \\ I_y \omega_y^{\times} \\ -I_{xz} \omega_x^{\times} + I_z \omega_z^{\times} \end{pmatrix}, \quad (13)$$

les vitesses angulaires $\omega_x^{\times}, \omega_y^{\times}, \omega_z^{\times}$ étant égales aux composantes par rapport au trièdre ($o^{\times}, x^{\times}, y^{\times}, z^{\times}$) de la vitesse angulaire de la caisse. A cause du caractère linéaire du problème nous pouvons les évaluer respectivement aux vitesses angulaires $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ (35,6). Les moments d'inertie I_x, I_y et le produit d'inertie I_{xz} sont donnés par (44,5^c), et le moment d'inertie I_z^{\times} est égal à

$$I_z^{\times} = I_{z0} + \frac{G_0}{g} a_0^2. \quad (14)$$

Avec (4) nous trouvons

$$\ddot{\vec{p}}_0 + \frac{G_0}{g} (\vec{p}_0^0 - \vec{p}_0^{\Sigma}) \times \ddot{\vec{p}}_0^0 = \begin{pmatrix} I_{x\ddot{\phi}} - I_{xz}\ddot{\psi} \\ I_{y\ddot{\chi}} \\ -I_{xz}\ddot{\phi} + I_z\ddot{\psi} \end{pmatrix} + \frac{G_0}{g} \begin{pmatrix} h\dot{v} \\ -\dot{s}(a_0\chi + h) - a_0\dot{w} \\ -\dot{s}(h\phi + a_0\psi) + a_0\dot{v} \end{pmatrix}. \quad (15)$$

Les forces \vec{F}_ℓ sont représentées dans le tableau (17). En appelant \vec{r}_ℓ^{Σ} le vecteur par rapport au trièdre $(o^{\Sigma}, x^{\Sigma}, y^{\Sigma}, z^{\Sigma})$ d'un point d'application, on trouve sans peine la relation

$$\vec{p}_\ell - \vec{p}_0^{\Sigma} = \bar{A} \vec{r}_\ell^{\Sigma} \quad (16)$$

à l'aide de (31,11) et (4). Les composantes par rapport au trièdre $(\omega, \xi, \eta, \zeta)$ se calculent en prémultipliant le vecteur mentionné dans le colonne précédent avec le matrice \bar{A} .

Force \vec{F}_ℓ	Composantes en $(o^{\Sigma}, x^{\Sigma}, y^{\Sigma}, z^{\Sigma})$	Composantes en $(\omega, \xi, \eta, \zeta)$	Point d'application	
			\vec{r}_ℓ^{Σ}	$\vec{p}_\ell - \vec{p}_0^{\Sigma} = \bar{A} \vec{r}_\ell^{\Sigma}$
a.de gravité		$G_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ -h \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_0 - h\chi \\ h\phi + a_0\psi \\ -h - a_0\chi \end{pmatrix}$
b.de ressort	$F_{ij} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	$F_{ij} \begin{pmatrix} -\chi \\ \phi \\ -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_i \\ \pm b_i \\ -f_{ij} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_i \mp b_i\phi \\ \pm b_i + a_i\psi \\ -(w-w_i) \pm b_i\phi_i \end{pmatrix}$
c.de glis- sière en direction longitudi- nale	$H_{xij} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$H_{xij} \begin{pmatrix} -1 \\ -\phi \\ \chi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_i \\ 0 \\ -f_{ij} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_i \mp b_i\phi \\ \pm b_i + a_i\psi \\ -(w-w_i) \pm b_i\phi_i \end{pmatrix}$
de glis- sière en direction latérale	$H_{yji} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$H_{yji} \begin{pmatrix} \psi \\ -1 \\ -\phi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_i \\ 0 \\ -\frac{1}{2}(f_{i1}+f_{i2}) \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_i \\ a_i\psi \\ -(w-w_i) \end{pmatrix}$
g.de traction		$\begin{pmatrix} L_{1,2} \\ D_{1,2} \\ V_{1,2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} l_{1,2} \\ 0 \\ -h_{1,2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} l_{1,2} - h_{1,2}\chi \\ h_{1,2}\phi + l_{1,2}\psi \\ -h_{1,2} - l_{1,2}\chi \end{pmatrix}$
h.moment moteur	$M_i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$M_i \begin{pmatrix} -\phi \\ 1 \\ \phi \end{pmatrix}$		

(17)

Maintenant nous sommes à même de rédiger les équations de mouvement. Les équations de translation s'écrivent

$$\frac{G_0}{g} (\ddot{s} - h\ddot{\chi}) = -\chi \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) - \sum_{i=1}^n (H_{xi1} + H_{xi2}) + \psi \sum_{i=1}^n H_{yi} + L_1 + L_2, \quad (18^a)$$

$$\frac{G_0}{g} (\ddot{v} + h\ddot{\phi} + a_0\ddot{\psi}) = \varphi \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) - \psi \sum_{i=1}^n (H_{xi1} + H_{xi2}) - \sum_{i=1}^n H_{yi} + D_1 + D_2, \quad (18^b)$$

$$\frac{G_0}{g} (\ddot{w} - a_0\ddot{\chi}) = G_0 - \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) + \chi \sum_{i=1}^n (H_{xi1} + H_{xi2}) - \varphi \sum_{i=1}^n H_{yi} + V_1 + V_2, \quad (18^c)$$

et pour la rotation nous trouvons

$$\begin{aligned} \frac{G_0 h}{g} \ddot{\vartheta} + I_{xz} \ddot{\phi} - I_{xz} \ddot{\psi} &= G_0 (h\varphi + a_0\psi) - \sum_{i=1}^n (F_{i1} - F_{i2}) b_i \\ &- \psi \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) a_i + \chi \sum_{i=1}^n (H_{xi1} - H_{xi2}) b_i - \sum_{i=1}^n H_{yi} (w - w_i) \\ &+ (D_1 h_1 + D_2 h_2) + \chi (D_1 l_1 + D_2 l_2) + \varphi (V_1 h_1 + V_2 h_2) + \psi (V_1 l_1 + V_2 l_2) \\ &- \psi \sum_{i=1}^n M_i, \quad (18^d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{G_0}{g} \ddot{\vartheta} (h + a_0\chi) - \frac{G_0 a_0}{g} \ddot{w} + I_y \ddot{\chi} &= -G_0 (a_0 - h\chi) + \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) a_i \\ &- \psi \sum_{i=1}^n (F_{i1} - F_{i2}) b_i + \sum_{i=1}^n (H_{xi1} + H_{xi2}) (w - w_i - a_i\chi) \\ &+ \sum_{i=1}^n (H_{xi1} - H_{xi2}) b_i (\varphi - \varphi_i) + \varphi \sum_{i=1}^n H_{yi} a_i - (L_1 h_1 + L_2 h_2) \\ &- \chi (L_1 l_1 + L_2 l_2) - (V_1 l_1 + V_2 l_2) + \chi (V_1 h_1 + V_2 h_2) + \sum_{i=1}^n M_i, \quad (18^e) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{G_0}{g} \ddot{\vartheta} (h\varphi + a_0\psi) + \frac{G_0 a_0}{g} \ddot{v} - I_{xz} \ddot{\phi} - I_z \ddot{\psi} &= \varphi \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) a_i \\ &+ \chi \sum_{i=1}^n (F_{i1} - F_{i2}) b_i + \sum_{i=1}^n (H_{xi1} - H_{xi2}) b_i - \sum_{i=1}^n H_{yi} a_i \\ &- \varphi (L_1 h_1 + L_2 h_2) - \psi (L_1 l_1 + L_2 l_2) + (D_1 l_1 + D_2 l_2) \\ &- \chi (D_1 h_1 + D_2 h_2) + \varphi \sum_{i=1}^n M_i. \quad (18^f) \end{aligned}$$

Procédons maintenant à la rédaction des équations de mouvement du i^{me} essieu. Nous pouvons de nouveau utiliser les relations (1) et (10). Cependant, dans la dernière équation aussi le vecteur $\bar{\rho}_0^0$ que le vecteur $\bar{\rho}_0^{\Sigma}$ doivent être remplacés par le vecteur

$$\bar{\rho}_{01}^{\Sigma} = \bar{\rho}_{01} + \bar{p}_1 \quad (19)$$

selon (31,14) et (31,16), de sorte que nous avons maintenant

$$\dot{H}_0 = \sum_{\ell} (\bar{\rho}_{\ell} - \bar{\rho}_{01}^{\Sigma}) \times F_{\ell}. \quad (20)$$

Selon (31,24) nous avons

$$H_0 = A_1 H_0^{\Sigma}, \quad (21)$$

avec

$$H_0^{\Sigma} = \begin{pmatrix} I_1 \omega_{xi}^{\Sigma} \\ I_{yi} \omega_{yi}^{\Sigma} \\ I_1 \omega_{zi}^{\Sigma} \end{pmatrix}; \quad (22)$$

en combinaison avec (32,9) et (35,12) nous trouvons

$$H_0^{\Sigma} = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\varphi}_1 \\ I_{yi} \left(-\frac{\dot{s}}{r} + \dot{\chi}_1 \right) \\ I_1 \dot{\psi} \end{pmatrix}, \quad H_0 = \begin{pmatrix} I_1 \dot{\varphi}_1 + I_{yi} \frac{\dot{s}}{r} \psi \\ I_{yi} \left(-\frac{\dot{s}}{r} + \dot{\chi}_1 \right) \\ I_1 \dot{\psi} - I_{yi} \frac{\dot{s}}{r} \varphi_1 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Pour \dot{J} nous trouvons avec (19), (31,15), (31,17) et (32,7^a) - (32,7^c)

$$\dot{J} = \frac{G_1}{g} \begin{pmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{v} + a_1 \ddot{\psi} \\ w_1 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

On trouve les forces F_{ℓ} et leur points d'application dans le tableau (25).

Force \vec{F}_ℓ	Composantes en $(0^{\vec{x}}, x^{\vec{x}}, y^{\vec{x}}, z^{\vec{x}})$	Composantes en $(\omega, \xi, \eta, \gamma)$	Point d'application	
			\vec{r}_ℓ	$\vec{p}_\ell - \vec{p}_{o1} = \vec{A}_1 \vec{r}_\ell$
a. de gravité		$G_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
b. de ressort	$F_{1j} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \chi \\ -\psi \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \pm b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\pm b_1 \begin{pmatrix} -\psi \\ 1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$
c. de glissière en direction longitudinal	$H_{x1j} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$H_{x1j} \begin{pmatrix} 1 \\ \psi \\ -\chi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ \pm b_1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\pm b_1 \begin{pmatrix} -\psi \\ 1 \\ \varphi_1 \end{pmatrix}$
	$H_{y1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$H_{y1} \begin{pmatrix} -\psi \\ 1 \\ \varphi \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
d, e. essieu-voie		$\begin{pmatrix} -X_{1j} \\ -Y_{1j} \\ -Q_{1j} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \xi_{1j} \\ \pm(b-\eta_{1j}-e_{1j}) \\ r+\gamma_{1j} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \xi_{1j} \pm b\psi \\ \pm(b-\eta_{1j}-e_{1j})-r\varphi_1 \\ r \pm b\varphi_1 + \gamma_{1j} \end{pmatrix}$
h. moment moteur	$M_1 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	$M_1 \begin{pmatrix} \psi \\ -1 \\ -\varphi \end{pmatrix}$		

(25)

Les équations de translation pour l'essieu i s'écrivent maintenant

$$\frac{G_1}{g} \ddot{s} = \chi(F_{11} + F_{12}) + (H_{x11} + H_{x12}) - \phi H_{y1} - (X_{11} + X_{12}), \quad (26^a)$$

$$\frac{G_1}{g} (\dot{v} + a_1 \ddot{\psi}) = -\phi (F_{11} + F_{12}) + \phi (H_{x11} + H_{x12}) + H_{y1} - (Y_{11} + Y_{12}), \quad (26^b)$$

$$\frac{G_1}{g} \dot{w}_1 = G_1 + (F_{11} + F_{12}) - \chi(H_{x11} + H_{x12}) + \phi H_{y1} - (Q_{11} + Q_{12}), \quad (26^c)$$

et pour la rotation on trouve

$$\begin{aligned} \frac{I_{y1}}{r} \ddot{s} \psi + I_1 \ddot{\psi} + \frac{I_{y1}}{r} \dot{s} \dot{\psi} &= (F_{11} - F_{12}) b_1 - \chi(H_{x11} - H_{x12}) b_1 \\ &+ (Y_{11} + Y_{12}) r + \phi_1 (Y_{11} - Y_{12}) b + (Y_{11} \xi_{11}^{\overline{x}} + Y_{12} \xi_{12}^{\overline{x}}) \\ &- (Q_{11} - Q_{12}) b + \phi_1 (Q_{11} + Q_{12}) r + Q_{11} (\eta_{11}^{\overline{x}} + e_{11}^{\overline{x}}) + Q_{12} (\eta_{12}^{\overline{x}} + e_{12}^{\overline{x}}) \\ &+ \phi M_1, \end{aligned} \quad (26^d)$$

$$\begin{aligned} I_{y1} \left(-\frac{\ddot{s}}{r} + \ddot{\chi}_1 \right) &= \phi (F_{11} - F_{12}) b_1 + \phi_1 (H_{x11} - H_{x12}) b_1 \\ &- (X_{11} + X_{12}) r - (X_{11} \xi_{11}^{\overline{x}} + X_{12} \xi_{12}^{\overline{x}}) - \phi_1 (X_{11} - X_{12}) b \\ &+ (Q_{11} \xi_{11}^{\overline{x}} + Q_{12} \xi_{12}^{\overline{x}}) - \phi (Q_{11} - Q_{12}) b - M_1, \end{aligned} \quad (26^e)$$

$$\begin{aligned} -I_{y1} \frac{\ddot{s}}{r} \phi_1 + I_1 \ddot{\psi} - I_{y1} \frac{\dot{s}}{r} \dot{\psi} &= -\chi (F_{11} - F_{12}) b_1 - (H_{x11} - H_{x12}) b_1 \\ &+ (X_{11} - X_{12}) b - \phi_1 (X_{11} + X_{12}) r - X_{11} (\eta_{11}^{\overline{x}} + e_{11}^{\overline{x}}) + X_{12} (\eta_{12}^{\overline{x}} + e_{12}^{\overline{x}}) \\ &+ \phi (Y_{11} - Y_{12}) b - (Y_{11} \xi_{11}^{\overline{x}} + Y_{12} \xi_{12}^{\overline{x}}) - \phi M_1. \end{aligned} \quad (26^f)$$

Afin d'obtenir les équations de mouvement définitives il faut éliminer les forces de liaison H_{x1j} et H_{y1} . Or, de (26^a), (26^f) et (26^b) on tire

$$H_{x11} + H_{x12} = \frac{G_1}{g} \ddot{s} - \chi(F_{11} + F_{12}) + (X_{11} + X_{12}) + \phi(Y_{11} + Y_{12}), \quad (27^a)$$

$$\begin{aligned} (H_{x11} - H_{x12}) b_1 &= I_{y1} \frac{\ddot{s}}{r} \phi_1 - I_1 \ddot{\psi} + I_{y1} \frac{\dot{s}}{r} \dot{\psi} - \chi(F_{11} - F_{12}) b_1 \\ &+ (X_{11} - X_{12}) b - \phi_1 (X_{11} + X_{12}) r - X_{11} (\eta_{11}^{\overline{x}} + e_{11}^{\overline{x}}) + X_{12} (\eta_{12}^{\overline{x}} + e_{12}^{\overline{x}}) \\ &+ \phi(Y_{11} - Y_{12}) b - (Y_{11} \xi_{11}^{\overline{x}} + Y_{12} \xi_{12}^{\overline{x}}) - \phi M_1, \end{aligned} \quad (27^b)$$

$$H_{y1} = \frac{G_1}{g} (-\phi \ddot{s} + \dot{v} + a_1 \ddot{\psi}) + \phi(F_{11} + F_{12}) - \phi(X_{11} + X_{12}) + (Y_{11} + Y_{12}). \quad (27^c)$$

En substituant ces expressions dans les équations (18^a) - (18^f) et (26^o) - (26^e) on obtient, avec

$$I_z = I_z^* + \sum_{i=1}^n I_i + \sum_{i=1}^n \frac{G_i a_i^2}{g} ; \quad (28)$$

$$\frac{G}{g} \ddot{s} - \frac{G_o h}{g} \ddot{\chi} = (L_1 + L_2) - \sum_{i=1}^n (X_{i1} + X_{i2}), \quad (29^a)$$

$$\frac{G}{g} \ddot{v} + \frac{G_o h}{g} \ddot{\psi} = (D_1 + D_2) - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}), \quad (29^b)$$

$$\begin{aligned} \frac{G_o}{g} \ddot{w} - \frac{G_o a_o}{g} \ddot{\chi} - \chi \ddot{s} \sum_{i=1}^n \frac{G_i}{g} &= G_o - \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) + \chi \sum_{i=1}^n (X_{i1} + X_{i2}) \\ &- \psi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) + (V_1 + V_2), \end{aligned} \quad (29^c)$$

$$\begin{aligned} \frac{G_o}{g} h \ddot{v} + I_x \ddot{\phi} - I_{xz} \ddot{\psi} &= G_o (h \phi + a_o \psi) - \sum_{i=1}^n (F_{i1} - F_{i2}) b_i \\ &- \phi \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) a_i + \chi b \sum_{i=1}^n (X_{i1} - X_{i2}) - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) (w - w_i) \\ &+ D_1 h_1 + D_2 h_2 + \chi (D_1 \ell_1 + D_2 \ell_2) + \phi (V_1 h_1 + V_2 h_2) + \psi (V_1 \ell_1 + V_2 \ell_2) \\ &- \phi \sum_{i=1}^n M_i, \end{aligned} \quad (30^a)$$

$$\begin{aligned} - \frac{G_o h}{g} \ddot{s} - \frac{G_o a_o}{g} \ddot{w} + I_y \ddot{\chi} - \frac{G_o a_o}{g} \chi \ddot{s} - \psi \sum_{i=1}^n \frac{G_i}{g} (w - w_i - a_i \chi) \\ &= - G_o (a_o - h \chi) + \sum_{i=1}^n (F_{i1} + F_{i2}) a_i - \phi \sum_{i=1}^n (F_{i1} - F_{i2}) b_i \\ &+ \sum_{i=1}^n (X_{i1} + X_{i2}) (w - w_i - a_i \chi) - b \sum_{i=1}^n \phi_i (X_{i1} - X_{i2}) \\ &+ \phi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) a_i - (L_1 h_1 + L_2 h_2) - \chi (L_1 \ell_1 + L_2 \ell_2) \\ &- (V_1 \ell_1 + V_2 \ell_2) + \chi (V_1 h_1 + V_2 h_2) + \sum_{i=1}^n M_i, \end{aligned} \quad (30^b)$$

$$\begin{aligned}
& -I_{xz} \ddot{\psi} + I_z \ddot{\psi} - \frac{G_0 h}{g} \ddot{s} \varphi - \frac{s}{r} \sum_{i=1}^n I_{yi} \varphi_i - \frac{\dot{s}}{r} \sum_{i=1}^n I_{yi} \dot{\varphi}_i \\
& = b \sum_{i=1}^n (X_{i1} - X_{i2}) + \psi \sum_{i=1}^n (X_{i1} + X_{i2}) a_i - r \sum_{i=1}^n \varphi_i (X_{i1} + X_{i2}) \\
& - \sum_{i=1}^n X_{i1} (\eta_{i1}^{\overline{x}} + e_{i1}^{\overline{x}}) + \sum_{i=1}^n X_{i2} (\eta_{i2}^{\overline{x}} + e_{i2}^{\overline{x}}) \\
& - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} + Y_{i2}) a_i + b \psi \sum_{i=1}^n (Y_{i1} - Y_{i2}) - \sum_{i=1}^n (Y_{i1} \xi_{i1}^{\overline{x}} + Y_{i2} \xi_{i2}^{\overline{x}}) \\
& - \varphi (L_1 h_1 + L_2 h_2) - \psi (L_1 \ell_1 + L_2 \ell_2) + (D_1 \ell_1 + D_2 \ell_2) - \chi (D_1 h_1 + D_2 h_2), \\
& \quad (30^c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{G_1}{g} (\dot{w}_1 + \ddot{s} \chi) &= G_1 + (F_{i1} + F_{i2}) - \chi (X_{i1} + X_{i2}) + \varphi (Y_{i1} + Y_{i2}) - (Q_{i1} + Q_{i2}), \\
& \quad (i=1, \dots, n) \quad (31^a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_1 \ddot{\psi}_1 + I_{yi} \frac{\ddot{s}}{r} \psi + I_{yi} \frac{\dot{s}}{r} \dot{\psi} &= (F_{i1} - F_{i2}) b_i - \chi (X_{i1} - X_{i2}) b \\
& + (Y_{i1} + Y_{i2}) r + (Y_{i1} \xi_{i1}^{\overline{x}} + Y_{i2} \xi_{i2}^{\overline{x}}) + b \varphi_i (Y_{i1} - Y_{i2}) \\
& - (Q_{i1} - Q_{i2}) b + Q_{i1} (\eta_{i1}^{\overline{x}} + e_{i1}^{\overline{x}}) - Q_{i2} (\eta_{i2}^{\overline{x}} + e_{i2}^{\overline{x}}) \\
& + r \varphi_i (Q_{i1} + Q_{i2}) + \psi M_i, \\
& \quad (i=1, \dots, n) \quad (31^b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{yi} \left(-\frac{\ddot{s}}{r} + \ddot{\chi}_i \right) &= \psi (F_{i1} - F_{i2}) b_i - (X_{i1} + X_{i2}) r - (X_{i1} \xi_{i1}^{\overline{x}} + X_{i2} \xi_{i2}^{\overline{x}}) \\
& + (Q_{i1} \xi_{i1}^{\overline{x}} + Q_{i2} \xi_{i2}^{\overline{x}}) - \psi (Q_{i1} - Q_{i2}) b - M_i. \\
& \quad (i=1, \dots, n) \quad (31^c)
\end{aligned}$$

Ces jeu d'équations ne correspond pas encore avec le jeu d'équation (45, 1^a) - (45, 1^c), mais en faisant certaines combinaisons on obtient une correspondance exacte. Pour abréger nous avons indiqué les combinaisons schématiquement:

$$\begin{aligned}
(29^a) + \frac{\psi}{r} &\leq (31^b) - \frac{1}{r} \leq (31^c) & = & \left. \begin{aligned} &= \\ &= \\ &= \end{aligned} \right\} (45, 1^a) \\
(29^b) & & & \\
(29^c) + \frac{\chi}{r} &\leq (31^c) & & \\
(30^a) - \chi(30^c) & & = & \left. \begin{aligned} &= \\ &= \\ &= \end{aligned} \right\} (45, 1^b) \\
(30^b) + \frac{1}{r} \sum (w - w_1 - a_1 \chi) & (31^c) & & \\
(30^c) + \chi(30^a) - \varphi(30^b) + \frac{\psi}{r} &\leq a_1 (31^c) & &
\end{aligned}$$

$$(31^a) - \frac{\chi}{r} (31^o)$$

$$(31^b) + \psi (31^o)$$

$$(31^o) - \psi (31^b)$$

$$\left. \begin{array}{l} = \\ = \\ = \end{array} \right\} (\underline{45}, 1^o)$$

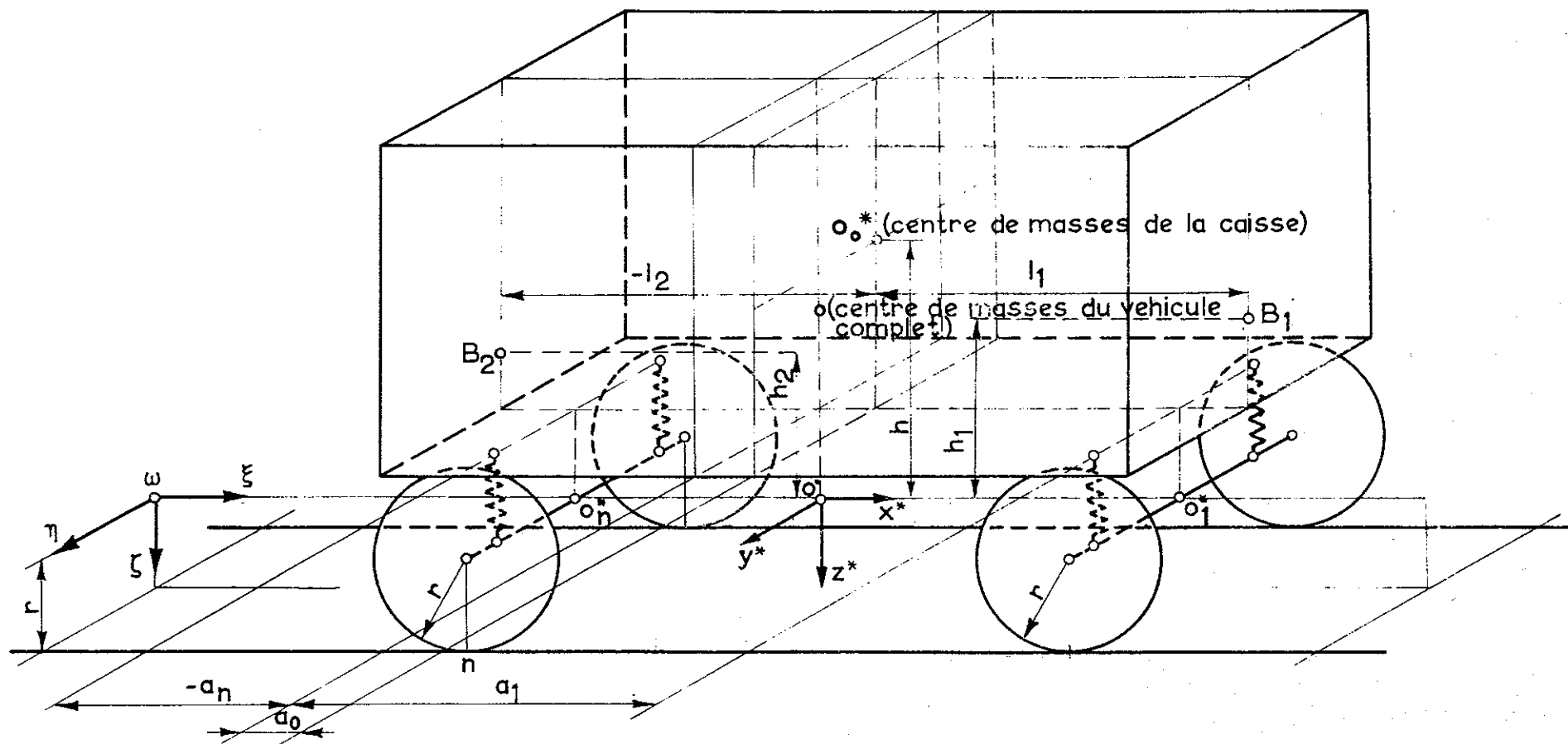


Fig.1. Véhicule sur une voie parfaitement droite en alignement.

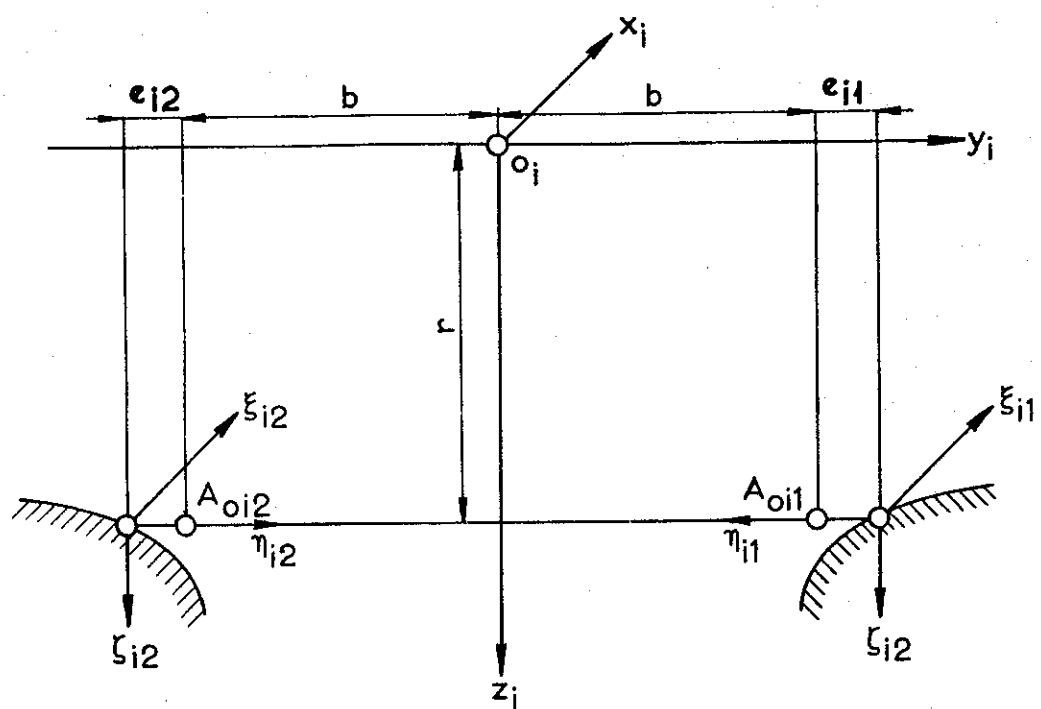


Fig. 2^a. Coupe transversale de la voie.

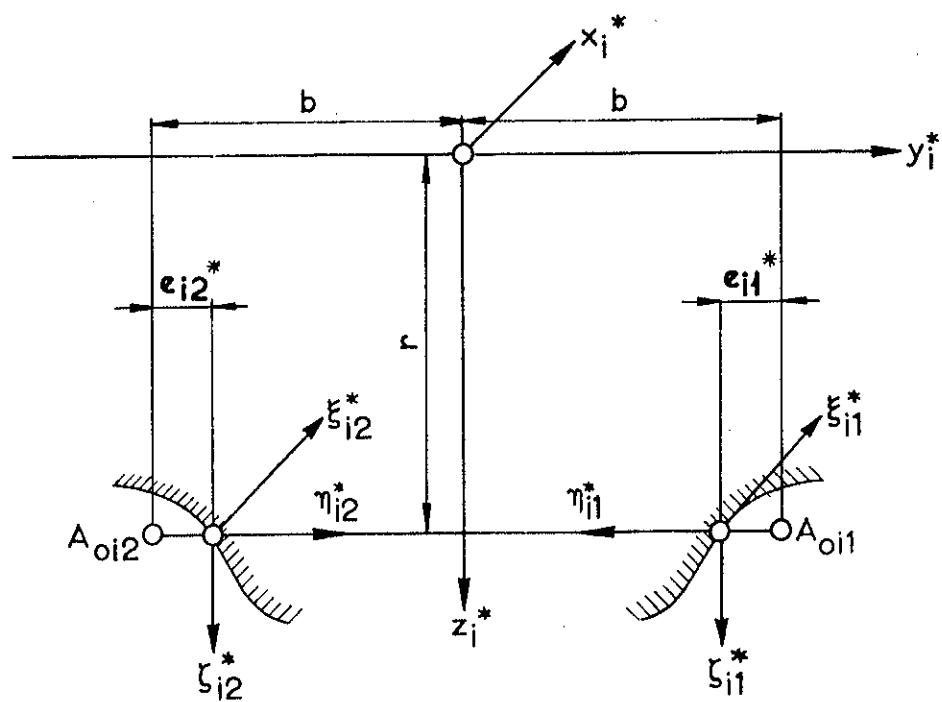


Fig. 2^b. Coupe transversale de l'essieu.

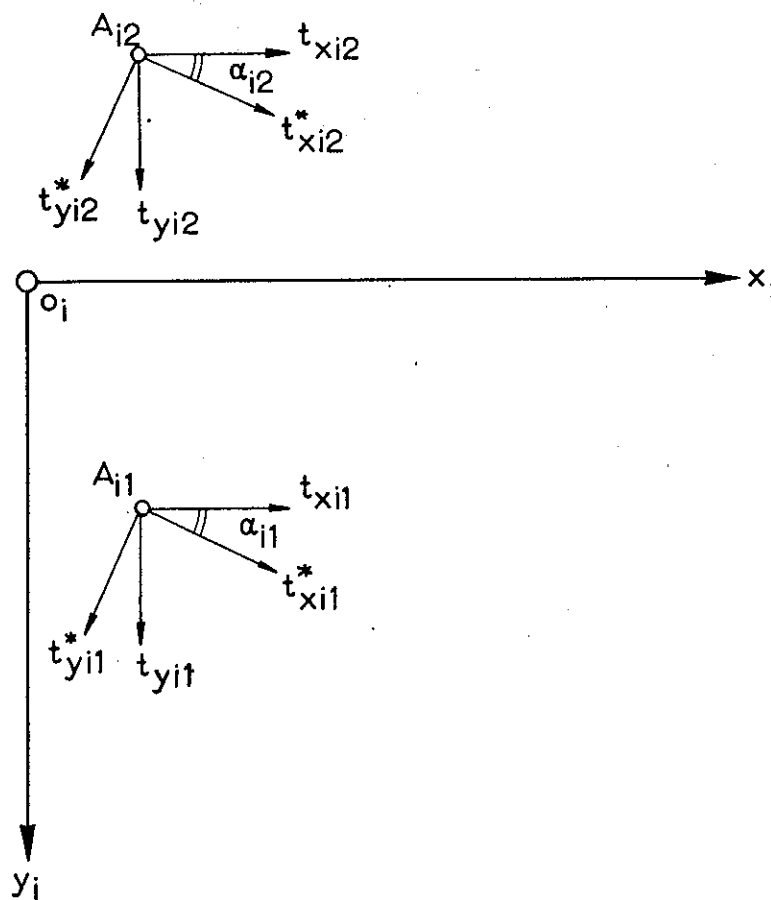


Fig. 3. Projections des tangentes t_{xi} etc. au plan (x_i, o_i, y_i) .

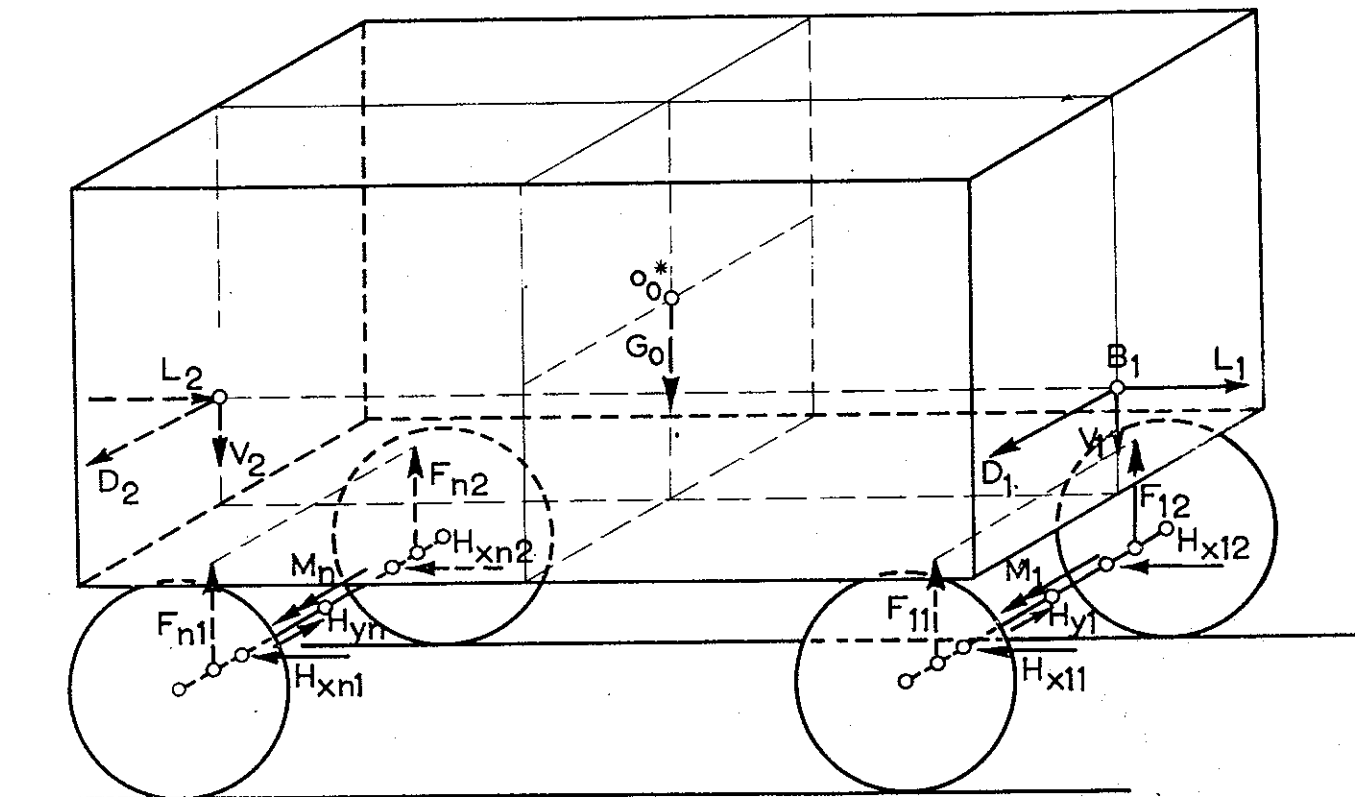


Fig. 4^a. Forces et moments s'appliquant à la caisse.

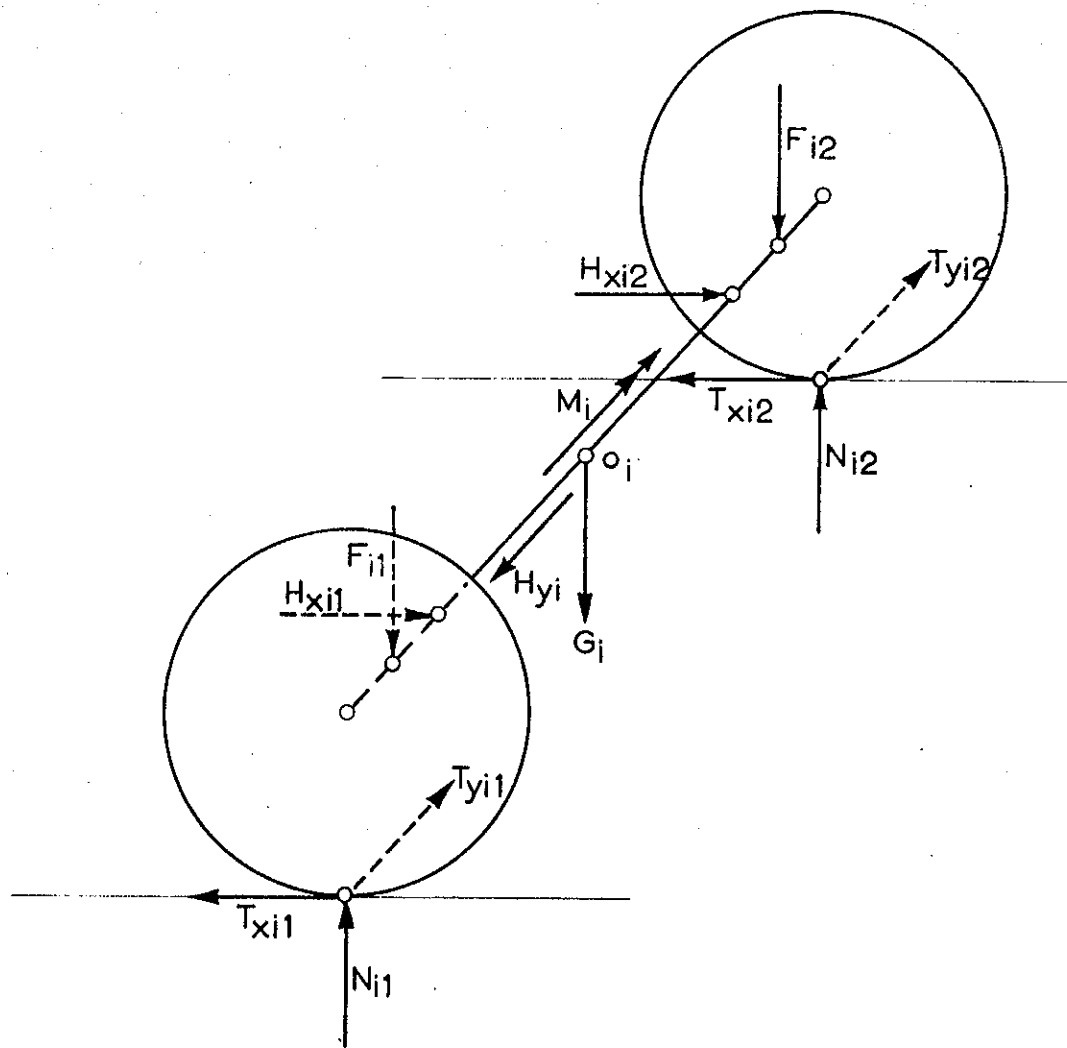


Fig.4^b. Forces et moments s'appliquant au i^{me} essieu.

Tableau I. Appellations des déplacements translatatoires et angulaires

Déplacement transversal ou angulaire	en anglais	en français	en allemand	en hollandais
u	recoiling	recul	zucken	rakken
v	transverse movement	balancement transversal	Querschwin- gen	dwaarsstoten; zwemmen
w	jumping	tangage	Tauchen	stoten
φ	pivoting of roling	pivotement de roulis	Rollen	rollen
χ	pivoting of pitching	pivotement de galop	Nicken	dompen
ψ	pivoting of hunting	pivotement de lacet	Drehen	slingeren
v combiné avec φ	rolling	roulis	Wanken	waggelen
v combiné avec ψ	hunting (nosing, yawing)	lacet	Schlingern	vetergang
w combiné avec χ	pitching	galop	Wogen	galopperen

Tableau II. Quelques valeurs pour les quantités m_{ij} et n_{ij} comme fonctions de l'angle ψ_{ij} .

ψ_{ij}	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°
m_{ij}	2,731	2,397	2,136	1,926	1,754	1,611	1,486	1,378
n_{ij}	0,493	0,530	0,567	0,604	0,641	0,678	0,717	0,759
ψ_{ij}	70°	75°	80°	85°	90°	95°	100°	105°
m_{ij}	1,284	1,202	1,128	1,061	1	0,944	0,893	etc.
n_{ij}	0,802	0,846	0,893	0,944	1	1,061	1,128	

Tableau III. Quelques valeurs pour les coefficients comme fonction du coefficient de contraction ν .

Coefficient de contraction ν	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$\frac{N_{ij}}{Ea_{ij}^2} \kappa_{xij}$	1,698	1,659	1,644	1,651	1,681	1,735
$\frac{N_{ij}}{Ea_{ij}^2} \kappa_{yij}$	1,698	1,591	1,504	1,434	1,376	1,327

- [1] H. Uebelacker, Untersuchungen über die Bewegung von Lokomotiven mit Drengestellten in Bahnkrümmungen, Organ Fortschr. Eisenb.-wes. 58 (1903) Beilage.
- [2] H. Heumann, Das Verhalten von Eisenbahnfahrzeugen in Gleisbogen, Organ Fortschr. Eisenb.-wes. 68 (1913) p. 104-108, 118-121, 136-140, 158-161; H. Heumann, Grundzüge der Führung der Schienenfahrzeuge, Elektr. Bahnen 21 (1950) p. 81 etc. -24 (1953) p. 313.
- [3] G. Borgeaud, Le passage en courbes de véhicules de chemin de fer, dont les essieux fournissent un effort de traction continu, Thèse Zürich (1937), 167 pp.
- [4] C.Th. Müller, Der Eisenbahnratsatz. Kinematik, Spurführung-geometrie und Führungsvermögen, Glasers Ann. 77 (1953) p. 264-281.
- [5] R. Lévi, Etude relative du contact des roues sur le rail, Rev. Gén. Chem. de fer 54I (1935) p. 81-109.
- [6] F.W. Carter, On the stability of running of locomotives, Proc. Roy.Soc. A121 (1928) p. 585-611; F.W. Carter, The Running of Locomotives, with reference to their tendency to derail, The Inst. of Civ.Engrs. Sel. Paper 91 (1930).
- [7] Y. Rocard, La stabilité de route des locomotives 1, Paris (1935) M. Julien et Y. Rocard, La stabilité de route des locomotives 2, Paris (1935).
- [8] R. Lévi dans une note non publiée de 1934.
- [9] B.S. Cain, Notes on the dynamics of electric locomotives, J. Appl. Mech. 63 (1941) p. A30-A36, A185-A187; B.S. Cain, Vibration of rail and road vehicles, New York and Chicago (1940).
- [10] R.D. Davies, Some experiments on the lateral oscillation of railway vehicles, J.Inst.Civ.Engrs. 11 (1938,1939) p. 224-261.
- [11] M. Royer, Recherches sur les propriétés dynamiques d'un dicône se déplaçant en alignement droit, Bull.Ass.Int.Congr.Chem. de fer 26 (1949) p. 801-816.
- [12] Lanos, Etude expérimentale et théorie du mouvement de lacet des locomotives en courbes, Rev. Gén. Chem. de fer 58 I (1939) p. 65-102 R. Lévi, Quelques observations au sujet du mouvement de lacet des locomotives en courbe, Rev. Gén. Chem. de fer 58 II (1939) p. 42-50
- [13] H. Uebelacker, Über die Massewirkungen bei plötzlichen Richtungsänderungen im Lauf von Eisenbahnfahrzeugen, Organ Fortschr. Eisenb. wes. 85 (1930) p. 271-284.

- [14] H. Heumann, Das Einfahren von Eisenbahnfahrzeugen in Gleisbogen, Organ Fortschr. Eisenb.-wes. 85 (1930) p. 463-474, 485-496, 520-527.
- [15] C.Th. Müller, Dynamische Problemen des Bogenlaufes von Eisenbahnfahrzeugen, Glasers Ann. 80 (1956) 8 p. 233-241.
- [16] A.D. de Pater, Das dynamische Verhalten von Eisenbahnfahrzeugen in Gleisbogen, Archiv Eisenb.techn. 10 (1957) p. 31-47.
- [17] A. Chartet, La théorie statique du déraillement d'un essieu, Rev. Gén. Chem. de fer 69 (1950) p. 365-386, 71 (1952) p. 442-453.
- [18] C.Th. Müller, Der Eisenbahnradsatz. Kinematik, Spurführungsgeometrie und Führungsvermögen, Glasers Ann. 77 (1953) p. 264-281.
- [19] H. Heumann, Spurkranz und Schienenkopf, Organ Fortschr. Eisenb.-wes. 86 (1931) p. 471-480, 491-499; H. Heumann, Zur Frage des Radreifen - Umrisses, Organ Fortschr. Eisenb.wes. 89 (1934) p. 336-342.
- [20] G. Borgeaud, Le passage en courbe de véhicules de chemin de fer, dont les essieux fournissent un effort de traction continu, Diss. Zürich (1937) p. 32-69.
- [21] Bouteloup, Le contact rail-roue. Etude géométrique. Méthode des enveloppes, Rev. Chem. de fer 66 (1947) p. 340-353.
- [22] G. Martarelli, Gioco reale e gioco convenzionale fra binario e sala montata, Ingegneria Ferroviaria 10 (1955) p. 751-762.
- [23] S. Timoshenko, Theory of elasticity, New York (1951) p. 377-382.
- [24] R. Lévi, Etude relative au contact des roues sur le rail, Rev. Gén. Chem. de fer 54 ^I (1939) p. 81-109.
- [25] A. Chartet, La théorie statique du déraillement d'un essieu, Rev. Gén. Chem. de fer 69 (1950) p. 365-386, 71 (1952).p. 442-453.
- [26] J.J. Kalker, The Transmission of Force and Couple between two Elastically Similar Rolling Spheres, Unpublished Report of the Laboratorium voor Toegepaste Mechanica der T.H. Delft (1960).